

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

22. Band, Heft 8

25. Juli 1940

S. 337—384

## Analysis.

### Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Hebroni, P.: Sur les inverses des éléments dérivables dans un anneau abstrait. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 285—287 (1939).

Ein Element  $a$  des früher (vgl. Comp. Math. **5**, 403—429; dies. Zbl. **19**, 63) vom Verf. definierten Ringes  $R$  heißt vollkommen (parfait), wenn es invertierbar und mit seinem Inversen differenzierbar ist. Es werden eine Reihe teilweise sehr einfache Zusammenhänge zwischen den Begriffen Invertierbarkeit, Differenzierbarkeit, Vollkommenheit angegeben, z. B.: Ist  $a$  differenzierbar und invertierbar, so ist auch der Anfangswert  $c$  invertierbar und  $c^{-1}a$  sowie  $ac^{-1}$  sind vollkommen. Herm. Schmidt.

Kolchin, E. R.: On the basis theorem for infinite systems of differential polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 923—926 (1939).

Nach Raudenbush (dies. Zbl. **9**, 100) sei  $\Sigma$  ein System einer unendlich großen Anzahl von Differentialpolynomen in  $y_1, \dots, y_n$  (von „Formen“),  $\Phi$  sei ein System einer endlich großen Anzahl von Formen in  $\Sigma$ . Das System  $\Phi$  heißt dann Basis von  $\Sigma$ , wenn für jede Form  $G$  in  $\Sigma$  der Ausdruck  $G^p$  im Differentialideal von  $\Phi$  enthalten ist;  $p$  ist eine ganze positive, von  $G$  abhängige Zahl. Diese Basis heißt stark, wenn für jedes  $G$  in  $\Sigma$  dieselbe Zahl  $p$  existiert. Jedes System  $\Sigma$  hat wenigstens eine Basis. — Diese Untersuchungen von Raudenbush ergänzt Verf. durch den Beweis, daß Systeme  $\Sigma$  möglich sind, welche keine starke Basis besitzen. Rádl.

Ritt, J. F., and E. R. Kolchin: On certain ideals of differential polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 895—898 (1939).

Ein Ideal von Differentialformen in einer unbestimmten Funktion  $y$  möge die isolierte Lösung  $y = 0$  besitzen. Nach Ritt (dies. Zbl. **20**, 200) ist das Ideal  $\Sigma$  dann ein Produkt  $\Sigma_1 \Sigma_2$ , wo  $\Sigma_1$  das Element  $y^p$  enthält und nur die Lösung  $y = 0$  besitzt, die nicht Lösung von  $\Sigma_2$  ist.  $\Sigma_1$  wird von  $\Sigma$  und  $y^p$  erzeugt. Wenn  $\Sigma$  eine Form vom Typus  $y + A$  enthält, wobei  $A$  als Polynom in  $y$  und den Ableitungen  $y_j$  kein Glied von einem Grad kleiner als 2 enthält, so kann  $p = 1$  gewählt werden, d. h.  $\Sigma$  besteht aus allen Formen, die Null werden für  $y = 0$ . Verallgemeinerungen dieses Satzes werden angedeutet. van der Waerden (Leipzig).

Fréchet, Maurice: Compléments à certains théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Ann. Chaire Phys. Math., Kiev **4**, 225—241 (1939).

Die Abhandlung besteht aus drei Teilen. Der erste zeigt, daß die Eindeutigkeitsbedingung von Osgood [Mh. Math. Phys. **9**, 331—345 (1898)], von einem gewissen Gesichtspunkte aus, die allgemeinste ist. Der zweite gibt Verschärfungen des Montelschen Satzes über die Folge der Differentialgleichungen mit gleichmäßig konvergierenden rechten Seiten [Bull. Sci. math. **50**, 205—217 (1926)]. Der dritte behandelt, als eine Anwendung des zweiten Teils, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\alpha x + \beta y + r_0(r)} = \frac{dy}{\gamma x + \delta y + r_0_1(r)},$$

( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) in der Umgebung von  $(0, 0)$  M. Nagumo (Osaka).

Chiellini, Armando: Sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché un'equazione differenziale lineare ed omogenea coincida con la propria aggiunta e sopra altre proprietà di tali equazioni di ordine pari. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari **9**, 204—214 (1939).

Verf. gibt einen neuen Beweis des folgenden Satzes: Notwendige und hinreichende



Bedingung dafür, daß eine lineare Differentialgleichung selbstadjungiert sei, ist die, daß alle ihre linearen Differentialinvarianten ungerader Ordnung verschwinden.

C. Miranda (Torino).

Smith, F. C.: On the logarithmic solutions of the generalized hypergeometric equation when  $p = q + 1$ . Bull. Amer. Math. Soc. 45, 629—636 (1939).

Die hypergeometrische Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit 2 endlichen singulären Punkten

$$\sum_{\nu=0}^n (A_{n-\nu} x - B_{n-\nu}) \theta^\nu y \equiv \left\{ \prod_{\nu=1}^n x(\theta + a_\nu) - \prod_{\nu=1}^n (\theta + c_\nu - 1) \right\} y = 0 \quad [\theta = d/d \lg x]$$

(vom Fuchsschen Typ) hat, wenn keine ganzzahligen Differenzen zwischen den  $c_\nu$  ( $a_\nu$ ) bestehen,  $n$  linear unabhängige, bei 0 ( $\infty$ ) multiplikative Lösungen. Mit Hilfe der klassischen Methode von Frobenius wird hier für die Fälle, daß zwischen den  $c_\nu$  ( $a_\nu$ ) ganzzahlige Differenzen auftreten, aber keine Differenz  $c_\nu - a_\mu$  ganz ausfällt, ein Fundamentalsystem aufgestellt. Durch geschickte Anlage der etwas unbequemen Rechnung gelingt es dem Verf., zu Endformeln zu gelangen, die als „geschlossene“ Darstellung der Koeffizienten in der bekannten Lösungsgestalt gelten können; nur noch die Bildung von Ableitungen gewisser  $\Gamma$ - und  $\sin$ -Produkte an der Nullstelle ist erforderlich. Für die lg-behafteten Anteile werden auch rekurrente Darstellungen durch Linearkombination mit logarithmischen Koeffizienten der Lösungen mit niedrigerer Höchstpotez von  $\lg x$  angegeben.

Herm. Schmidt (Jena).

Cesari, Lamberto: Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 171—193 (1939).

Es handelt sich um die nichthomogene Gleichung  $y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^n a_\nu(x) y^{(n-\nu)} = \varphi(x)$ .

Wenn hier die Funktionen  $f_\nu(x)$  und  $\varphi(x)$  für  $x \geq x_0$  stetig sind und für  $x \rightarrow \infty$   $f_\nu(x) \rightarrow a_\nu$ ,  $\varphi(x) \rightarrow b$  geht, während die Wurzeln  $\varrho_\lambda$  der Gleichung  $\varrho^n + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \varrho^{n-\nu} = 0$  sämtlich reell, voneinander und von Null verschieden sind, dann hat nach Perron [Math. Z. 6, 161—166 (1920)] die Differentialgleichung mindestens eine Lösung mit  $y(x) \rightarrow b/a_n$ ,  $y^{(\nu)} \rightarrow 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ). Verf. verallgemeinert die Voraussetzungen und zeigt in der Hauptsache, daß die Aussage richtig bleibt, wenn an Stelle der Annahmen über  $\varrho_\lambda$  eine der folgenden tritt: a) alle Realteile  $\Re \varrho_\lambda$  sind  $\neq 0$  (die  $\varrho_\lambda$  dürfen aber komplex und mehrfach sein); b) falls einmal  $\Re \varrho_\lambda = 0$ , ist diese Wurzel selber  $\neq 0$  und einfach,

ferner sind die Integrale  $\int_{x_0}^\infty |f_\nu(x) - a_\nu| dx$ ,  $\int_{x_0}^\infty |\varphi(x) - b| dx$  konvergent. Beim Beweis wird zunächst der Fall  $f_\nu(x) = a_\nu$  betrachtet, dann im allgemeinen Fall die Differentialgleichung geschrieben:  $y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^n a_\nu y^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu - f_\nu(x)) y^{(n-\nu)} + \varphi(x)$ , worauf dann ein Verfahren der schrittweisen Näherungen von naheliegender Form einsetzt. Schließlich

werden Verallgemeinerungen auf Systeme der Form  $y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^n f_{\lambda\mu}(x) y_\mu + \varphi_\lambda(x)$  gegeben, wo  $f_{\lambda\mu} \rightarrow a_{\lambda\mu}$ ,  $\varphi_\lambda \rightarrow b_\lambda$ ; für die betreffenden Lösungen geht  $y_\lambda \rightarrow l_\lambda$ , wobei sich die  $l_\lambda$  aus dem Gleichungssystem  $\sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} l_\mu + b_\lambda = 0$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ) berechnen.

Herm. Schmidt (Jena).

Lancaster, Otis E.: Some results concerning the behavior at infinity of real continuous solutions of algebraic difference equations. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 169—177 (1940).

Während es an Untersuchungen über das Wachstum reeller Lösungen von algebraischen Differentialgleichungen nicht fehlt [vgl. z. B. Hardy, Orders of infinity. (Cambridge 1924) 6, 41, woselbst auch Literaturangaben], ist der allgemeine Fall algebraischer Differenzengleichungen in dieser Hinsicht noch kaum behandelt. Sei zunächst  $y(x)$  eine reelle stetige Lösung einer algebraischen Differenzengleichung



erster Ordnung; dann gibt es keine ganze Zahl  $n$  derart, daß für  $x > x_0(n)$   $y(x) > Ce_2(x \lg_n x)$  wäre (die Indizes bedeuten Iteration von  $e^x$  bzw.  $\lg x$ ). Für Gleichungen höherer Ordnung gelingt der Beweis der gleichen Aussage nur unter Einschränkungen, entweder für die auftretenden Potenzen von  $x$ ,  $y(x+j)$  ( $j=0, 1, \dots, m$ ) oder bezüglich der „Regelmäßigkeit“ des Wachstums der betrachteten Lösung. Der Hauptgedanke beim Beweis ist Vergleich der Größenordnung der einzelnen Glieder in der Differenzengleichung: es kann nicht sein, daß ein Glied alle übrigen asymptotisch überwiegt! Die Ergebnisse werden mit solchen über Differentialgleichungen verglichen; für  $m=1$  liegt dort das Wachstum unterhalb  $e_1(ax^k)$  [Lindelöf], hier aber wird z. B.  $a^{b^x}$  erreicht ( $a, b > 0$ ;  $b$  rational). Herm. Schmidt (Jena).

**Bulgakov, B. V.:** Sur le mouvement troublé par des forces de haute fréquence. *Compositio Math.* **7**, 390—427 (1940).

Verf. betrachtet das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \vartheta, \mu) & j &= 1, 2, \dots, L \\ f_j(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \vartheta, \mu) &= F_j(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [f_{jm}(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu) \cos m\vartheta + \varphi_{jm}(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu) \sin m\vartheta], \\ \vartheta &= \frac{t-t_0}{\mu} + \vartheta_0, \end{aligned}$$

wobei  $x_1, x_2, \dots, x_L$  Funktionen der Zeit sind;  $\mu$  ist ein Parameter. Die Funktionen  $F_j(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu)$ ,  $f_{jm}(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu)$ ,  $\varphi_{jm}(x_1, x_2, \dots, x_L, t, \mu)$  mit ihren Ableitungen müssen gewissen Stetigkeits- und Beschränktheitsbedingungen genügen. Für dieses Gleichungssystem gibt Verf. ein recht gut konvergentes Approximationsverfahren an, das in einer verschiedenen Approximation der Lösung in Teilintervallen nach der Zeit besteht, wobei die Lösungen genügend stetig aneinander angeschlossen werden. Die Bestimmung der approximativen Lösung geschieht am einfachsten aus einem „reduzierten Gleichungssystem“.

Wegner (Heidelberg).

**Cinquini, Silvio:** Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine  $n$ . *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **9**, 61—77 (1940).

Verf. gibt verschiedene Typen hinreichender Bedingungen für die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  an, die in  $n$  Punkten des Intervalls  $(a, b)$  verschwindet, wobei  $f$  eine für die  $x$ -Werte des Intervalls  $(a, b)$  und für beliebige Werte von  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  definierte Funktion bezeichnet; er erweitert dadurch einige früher von ihm selbst erhaltene Ergebnisse des Falles  $n=2$  (dies. Zbl. **20**, 112; **21**, 403). Grundlegend ist die vorbereitende Untersuchung desjenigen Falles, in dem  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  dem absoluten Betrag nach von einer in  $(a, b)$  summierbaren Funktion von  $x$  allein übertroffen wird und bezüglich der Variablen  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  einer Lipschitzbedingung genügt. Unter diesen Voraussetzungen ist bekanntlich ein Integral der Differentialgleichung, das einem beliebigen System von Anfangsbedingungen  $y^{(i)}(x_0) = y_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) genügt, im ganzen Intervall  $(a, b)$  bestimmt, so daß das betrachtete Problem sich auf die Lösung eines Systemes von  $n$  Gleichungen in den  $n$  Unbekannten  $y_i$  reduziert. Um die Lösbarkeit dieses Systems nachzuweisen, wendet Verf. ein Verfahren schrittweiser Elimination an, indem er zeigt, daß jede Unbekannte sich als Funktion der folgenden Unbekannten  $y_i = \varphi_i(y_{i+1}, \dots, y_{n-1})$  ausdrücken läßt. Es fehlt jedoch der Beweis der Stetigkeit der Funktionen  $\varphi_i$ , die für die Vollständigkeit der Schlußweise unentbehrlich ist. C. Miranda (Torino).

**Godefroy, Marcel:** Sur l'extension des systèmes différentiels aux espaces métriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 593—595 (1939).

Zur Differentialgleichung (\*)  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$  gehört eine Menge von Halbgeraden  $\Delta(P)$ , welche vom Punkte  $P(x, t)$  mit dem Winkelkoeffizienten  $f(x, t)$  nach rechts streben. Ein Integral von (\*) ist eine stetige Funktion  $x(t)$ , welche in jedem  $P$  die



Tangente  $\Delta(P)$  nach rechts besitzt. Verf. verallgemeinert dies, indem er die  $\Delta(P)$  durch metrische Räume  $E_t$  ersetzt. Eine Bahnkurve ist jetzt eine Funktion  $\{P(t)\}$ , welche jedem Wert von  $t$  einen Punkt  $P_t$  aus  $E_t$  zuschreibt. Eine Abbildungsfamilie  $\tau_h$  wird dadurch charakterisiert, daß man jedem reellen Wert  $h$  eine Abbildung  $P' = \tau_h P$  der Punkte  $P$  aus  $E_t$  auf die Punkte  $P'$  aus  $E_{t+h}$  zuordnet. Eine Bahnkurve ist ein Rechtsintegral von (\*), wenn  $1/h \|P_{t+h}, \tau_h P_t\|$  nach Null strebt, für  $h \rightarrow 0$  und  $>0$ . Sie heißt ein Vorintegral (pré-intégrale), wenn derselbe Ausdruck einen beschränkten lim. besitzt. Verf. gibt nun hinreichende Bedingungen für die Existenz und die Einzigkeit eines Rechtsintegrals nach  $\tau_h$  an, welches von  $P_t$  ausgeht und auf  $(t_0, t_1)$  definiert ist. Wie Verf. bemerkt, gehen diese Bedingungen im wesentlichen auf Verallgemeinerungen von Sätzen von Montel [Bull. Sci. math., II. s. 50, 205—217 (1926)] und von Zaremba [Bull. Sci. math., II. s. 60, 144 (1936); dies. Zbl. 14, 157] zurück. Es werden schließlich noch Bedingungen anderer Form angegeben, welche mit einer Arbeit von Aumann [S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (3) 12, 155—163 (1938); dies. Zbl. 20, 222] zusammenhängen. *S. Stoilow* (Bukarest).

**Mayer, A.:** Des trajectoires sur les surfaces orientées. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 673—675 (1939).

$F$  sei eine geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht  $p \geq 1$ . Sie sei analytisch. Durch ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung  $u = X(u, v)$ ,  $v = Y(u, v)$  mit stetig differenzierbaren rechten Seiten wird auf  $F$  eine Kurvenschar definiert. Verf. gibt ohne Beweis eine Reihe von Sätzen über den Verlauf der Trajektorien an. Diese Sätze enthalten Verallgemeinerungen der bekannten Poincaréschen Theoreme für den Fall  $p = 1$ . Wegen der Einzelheiten sei auf die Note selbst verwiesen.

*E. Hopf* (Leipzig).

**Oldenburger, Rufus:** Exponent trajectories in symbolic dynamics. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 453—466 (1939).

Morse und Hedlund haben die unendlichen Symbolfolgen, durch welche sich die Lösungskurven gewisser Differentialsysteme, z. B. die Geodätischen auf Flächen negativer Krümmung, charakterisieren lassen, zum Gegenstand einer selbständigen Untersuchung gemacht (Symbolische Dynamik; dies. Zbl. 19, 335). Jeder derartigen Folge ist durch Zusammenfassung eines mehrmals hintereinander auftretenden Symbols eine Folge von Exponenten ( $\geq 1$ ) zugeordnet. Mit diesen Exponentenfolgen beschäftigt sich der Verf.

*E. Hopf* (Leipzig).

**Morse, Marston, and Gustav A. Hedlund:** Symbolic dynamics. II. Sturmian trajectories. Amer. J. Math. 62, 1—42 (1940).

Die von den Verff. in ihrer ersten Arbeit [Ann. of Math. 60, 815—866 (1938); dies. Zbl. 19, 335] untersuchten Symbolfolgen entsprachen den Geodätischen auf geschlossenen Flächen negativer Krümmung. In der vorliegenden zweiten Arbeit werden die ganz anderen (und viel einfacheren) Folgen untersucht, welche die Geodätischen auf dem Torus der Krümmung Null charakterisieren. Die charakteristische Eigenschaft dieser Folgen wird in folgender Weise arithmetisch definiert: Eine Folge  $\dots c_{-2} c_{-1} c_0 c_1 c_2 \dots$ , wo jedes  $c_i$  eines von zwei Symbolen  $a$  oder  $b$  ist, heißt Sturmsche Folge, wenn für jedes feste  $n$  die Anzahlen  $A_{n,i}$  der  $a$  in den Blöcken  $c_{i+1} \dots c_{i+n}$  höchstens zwei Werte annehmen. Es wird gezeigt, daß  $a$  (und  $b$ ) in einer Sturmschen Folge mit einer (gleichmäßigen) Limesfrequenz

$$h_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n,i}}{n}, \quad h_b = 1 - h_a$$

auftreten. Sturmsche Folgen mit rationalem  $h$  sind entweder periodisch oder „schief“. Eine schiefe Folge enthält eine periodische Rechts- und eine ebensolche Linksfolge. Die Struktur der Folge bei gegebenem  $h$  wird ziemlich eingehend untersucht. Die Anzahl der Ergänzungen einer Sturmschen Halbfolge zu einer Sturmschen Folge wird bestimmt. Jede nicht schiefe Sturmsche Folge ist rekurrent. Die Rekurrenzfunktion  $R(n; h)$  ist durch  $h$  bereits bestimmt; sie wird mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung



von  $h_a$  (oder  $h_b$ ) vollständig berechnet. Eine Geodätische auf dem erwähnten Torus ist durch die Folge der Schnittpunkte mit den beiden Geodätischen  $a, b$  einer geodätischen kanonischen Zerschneidung gekennzeichnet. Arithmetisch werden diese Folgen erhalten, wenn man die Zahlen  $a$  der Folge  $\nu(1 - \vartheta)$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 1$ ,  $\nu = 0, \pm 1, \dots$ , und die Zahlen der Folge  $\varrho + \nu\vartheta$ ,  $\varrho$  fest, der Größe nach anordnet. Die so erhaltenen Folgen sind mit den Sturmschen Folgen im wesentlichen identisch ( $h_a = \vartheta$ ), wenn im Falle gemeinsamer Zahlen  $a, b$  in den beiden Folgen  $\nu(1 - \vartheta)$ ,  $\varrho + \mu\vartheta$  gewisse Verabredungen über die Reihenfolge der betreffenden Symbole  $a, b$  in der Folge getroffen werden. Aus dem Sturmschen Trennungssatz folgt, daß die Nullstellen  $a$  einer Lösung von  $y'' + f(x)y = 0$ ,  $f(x+1) \neq f(x)$ , und die ganzen Zahlen  $b: 0, \pm 1, \dots$ , alle der Größe nach geordnet, ebenfalls eine Sturmsche Folge bilden. Viele Sätze der Arbeit sind anders (unsymmetrisch) formuliert als oben angedeutet, da viel mit einer Definition der Sturmschen Folge gearbeitet wird, in der ein Symbol ( $b$ ) eine bevorzugte Stellung einnimmt.

E. Hopf (Leipzig).

**Terracini, A.: Sur l'interprétation géométrique des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 291—302 (1939).

Verf. gibt eine geometrische Deutung der charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

indem er ausgeht von der Kleinschen Abbildung der  $\infty^4$  Geraden des Raumes  $\Sigma_3(x, y, z)$  auf die vierfach ausgedehnte Quadrik  $M_4^2$ , welche im  $S_5$  der homogenen Plückerschen Strahlenkoordinaten  $p_{ik}$  durch die quadratische Gleichung

$$p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0$$

definiert wird. Jedes Geradenbüschel und somit jedes Element  $x, y, z, p, q$  des  $\Sigma_3$  ist dann abgebildet auf eine Erzeugende der  $M_4^2$ . Die Schar der  $\infty^4$  durch (1) im  $\Sigma_3$  ausgesonderten Elemente wird das Bild eines auf der Quadrik gelegenen Systems  $\Gamma$  von  $\infty^4$  Geraden des  $S_5$ . Jeder Punkt der Quadrik ist im allgemeinen Mittelpunkt eines Kegels von  $\infty^1$  Strahlen des Systems  $\Gamma$ . — Ein Punkt  $P$  der  $M_4^2$  und eine Gerade  $r$  eines Systems  $\Gamma$  definieren eine Ebene  $\pi(r, P)$ : nämlich die Tangentialebene längs  $r$  an den Kegel der  $\Gamma$ -Strahlen durch  $P$ . Zerlegt man andererseits das System  $\Gamma$  in  $\infty^3$  Systeme von  $\infty^1$  Geraden, also in  $\infty^3$  Regelflächen  $R$ , dann bestimmt das Paar  $r, P$  eine zweite Ebene  $\sigma(r, P)$ , nämlich die Tangentialebene in  $P$  an die Fläche  $R$ , welcher  $r$  angehört [ $\sigma(r, P)$  geht auch durch  $r$ ]. — Verf. zeigt nun, daß sich stets genau eine Zerlegung eines gegebenen Systems  $\Gamma$  in  $\infty^3$  Regelflächen  $R$  vornehmen läßt derart, daß die Ebenen  $\sigma(r, P)$  und  $\pi(r, P)$  zueinander polar sind vermöge der durch die  $M_4^2$  im  $S_5$  induzierten Polaritätsbeziehung. Die bei dieser ausgezeichneten Zerlegung entstehenden Regelflächen sind die Bilder der charakteristischen Streifen der dem System  $\Gamma$  entsprechenden Differentialgleichung (1). — Dem Beweis seiner Sätze legt Verf. die Formeln

$$(2) \quad \begin{aligned} p_{12} &= mx - y, & p_{13} &= (p + mq)x - z, & p_{14} &= -1, \\ p_{23} &= (p + mq)y - mz, & p_{24} &= -m, & p_{34} &= -(p + mq) \end{aligned}$$

zugrunde; die  $p_{ik}$  sind die Determinanten der Matrix aus den homogenen Punkt-koordinaten  $x:y:z:1$  und  $1:m:p+mq:0$  des Trägers des Elementes  $x, y, z, p, q$  und eines unendlich fernen Punktes der Ebene dieses Elementes. Jede Gerade der Quadrik ist analytisch gegeben entweder durch die fünf Bestimmungstücke  $x, y, z, p, q$  ihres Bildelementes oder durch die Formeln (2), welche sämtliche Punkte der Geraden liefern, wenn die Konstante  $m$  ihre  $\infty^1$  Werte durchläuft. — Wenn sich der Punkt  $P$  auf der Geraden  $r$  eines Systems  $\Gamma$  bewegt, dann beschreibt die zugeordnete Ebene  $\pi(r, P)$  ein Büschel, welches auf die Punktreihe  $r$  projektiv abgebildet ist. Diese Abbildung kann bei spezieller Lage von  $r$  entarten, und zwar dann und nur dann, wenn die Koordinaten  $x, y, z, p, q$  von  $r$  in der Beziehung

$$(3) \quad F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z) = 0$$



stehen. Ein spezielles System  $\Gamma$  aus lauter speziellen Geraden, bei welchen also (3) eine Folge von (1) wird, besitzt lauter abwickelbare Regelflächen und umgekehrt. — Nimmt die Gerade  $r$  keine spezielle Lage ein, dann kann man auf ihr die Bildpunkte  $P^{(1)}, P^{(2)}$  (ihre „Hauptpunkte“) der beiden durch sie laufenden Ebenen  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$  der Quadrik ins Auge fassen. Hat man nun irgendeine Regelfläche eines Systems  $\Gamma$ , so ist diese dann und nur dann das Bild eines charakteristischen Streifens, wenn die Tangentialebenen in den beiden Hauptpunkten jeder ihrer Erzeugenden zusammenfallen mit den beiden Ebenen der Quadrik, welche durch die betreffende Erzeugende hindurchgehen. — Anschließend entwickelt Verf. im einzelnen noch eine Reihe von projektiven Beziehungen, die sich aus der geometrischen Deutung der Differentialgleichung (1) ergeben.

W. Neumer (Worms).

**Carleman, T.:** Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ark. Mat. Astron. Fys. 26 B, Nr 17, 1–9 (1939).

Es seien  $A_{p,q}(x, y)$  in  $x^2 + y^2 \leq d^2$  reellwertige zweimal differenzierbare Funktionen und  $B_q(x, y)$  daselbst reellwertige stetige Funktionen. Die Eigenwerte  $\lambda_p$  der Matrix  $(A_{p,q})$  seien voneinander verschieden. Verf. beweist dann, daß das Gleichungssystem

$$(1) \quad \frac{\partial z_p}{\partial x} + \sum_{q=1}^m A_{p,q} \frac{\partial z_q}{\partial y} + \sum_{q=1}^m B_q z_q = 0, \quad (p = 1, \dots, m)$$

mit den Bedingungen  $z_p(0, y) = 0$ , in einer kleinen Umgebung von  $(0, 0)$  nur identisch verschwindende Lösungen besitzt. (1) wird in die Form  $\frac{\partial u_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = \sum_{q=1}^m c_{p,q} u_q$

transformiert. Wenn alle  $\lambda_p$  reell sind, sind die Resultate schon bekannt. Wenn alle  $\lambda_p$  nichtreell sind, führt Verf. eine Integralformel für  $\varphi_p = u_p e^{-t(x+y^2-\alpha x^2)}$  ( $\alpha, t > 0$ ) ein, indem er mit  $T_l$  den Bogen  $x + y^2 - \alpha x^2 = l^2$ ,  $x \geq 0$  und mit  $D_l$  den Bereich  $x \geq 0$ ,  $x + y^2 - \alpha x^2 \leq l^2$  bezeichnet:

$$\varphi_p(x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{T_l} \varphi_p \psi_p (dy - \lambda_p dx) - \frac{1}{2\pi} \iint_{D_l} H_p(\varphi) \psi_p dx dy;$$

hierin ist  $H_p(\varphi)$  eine lineare Form von  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  und  $\psi_p(x', y', x, y)$  besitzt die Eigenschaft  $|\psi_p| \leq K/\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ . Daraus beweist Verf. für  $0 < l' < l$  die Ungleichung:

$$\iint_{D_{l'}} \sum_{p=1}^m |u_p| dx dy \leq 2K \sqrt{\frac{S}{\pi}} e^{-t(l-l')^2} \int_{T_l} \sum_{p=1}^m |u_p| \cdot |dy - \lambda_p dx|,$$

( $S$  = Flächeninhalt von  $D_l$ ), wenn  $l$  genügend klein ist; also ergibt sich für  $t \rightarrow +\infty$  in  $D_{l'}$   $u_p = 0$ . Der Beweis wird leicht auf den Fall erweitert, wo es reelle und nicht-reelle Eigenwerte  $\lambda_p$  gibt.

Mitic Nagumo (Osaka).

**Vranceanu, G.:** A classification of the Monge-Ampère equations. Bul. fac. şti. Cernăuţi 12, 167–192 (1939).

Verf. geht davon aus, daß eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

durch ein System von zwei Pfaffschen Gleichungen in 7 Veränderlichen ersetzt werden kann, und daß die invarianten Eigenschaften dieses Systems gegenüber allen Punkttransformationen sofort die invarianten Eigenschaften von  $F=0$  gegenüber allen Berührungstransformationen liefern. Das ist eine Betrachtungsweise, die von Lie bereits 1872 in noch allgemeinerer Fassung ausgesprochen worden ist (Lie, Ges. Abh. Bd. III, Abh. V). Die Gleichung  $F=0$  wird als eine Resolvente des Systems bezeichnet, solcher Resolventen kann es aber sehr verschiedenartige geben. So kann z. B. eine



Monge-Ampèresche Gleichung  $F = 0$  mit zwei verschiedenen Systemen von Charakteristiken als Resolvente von zwei verschiedenen zweigliedrigen Pfaffschen Systemen in 6 Veränderlichen betrachtet werden. Der Verf. untersucht nun gewisse zweigliedrige Pfaffsche Systeme und gewinnt zahlreiche Ergebnisse über die Klassifikation der Monge-Ampèreschen Gleichungen, ferner der Gleichungen, die er als Goursatsche Gleichungen bezeichnet, der Gleichungen  $s = \lambda(x, y, z, p, q)$ , die er als Darbouxssche bezeichnet, der Imschenetzkijschen Gleichungen  $s = Mq + N$ , wo  $M$  und  $N$  Funktionen von  $x, y, z, p$  sind, der Gleichungen von der Form  $s = apq + \alpha p + \beta q + \gamma$ , wo  $\alpha, \beta, \gamma$  Funktionen von  $x, y, z$  sind, endlich der Laplaceschen Gleichungen. Er bezieht sich dabei auch auf eigene ältere Arbeiten im *J. Math. pures appl.* (9) **16** (1937) (dies. Zbl. **17**, 351) und in *Mathematica (Cluj)* **13** (1937) (dies. Zbl. **18**, 125). *Engel*.

**Tweedie, M. C. K.:** The solution of a certain class of differential equations. *Math. Gaz.* **24**, 25—29 (1940).

Es wird gezeigt, daß der Differentialgleichung

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \eta y = 0,$$

wo die Koeffizienten Funktionen nur von  $x$  (oder nur von  $t$ ) sind, formal die Summe von zwei als konvergent vorausgesetzten Reihen  $y = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k f^{(k)} + B_k F^{(k)})$  genügt;

$A_k, B_k$  sind bestimmte Funktionen von  $x$  und  $f^{(k)}, F^{(k)}$  bedeuten  $k$ -te Ableitungen von zwei beliebigen Funktionen von  $t$ . — Die Lösung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird formal, wie weiter gezeigt wird, durch eine ähnlich erhaltene Reihe (manchmal auch in Fällen, wo andere Methoden nicht zum Ziele führen) ausgedrückt. Die Ordnung beider Gleichungen kann beliebig erhöht werden.

*Rádl* (Prag).

**Schouten, J. A., und W. van der Kulk:** Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. I. Ein Theorem über die Klassen der Faktoren eines Systems. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **43**, 18—31 (1940).

Etant donnée une équation de Pfaff dans  $n$  variables (1)  $ds^1 = \lambda_i^1 dx^i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) on appelle classe de (1) le nombre minimum de variables qu'on peut laisser figurer dans (1). Si l'on indique par  $2p$  le rang du covariant bilinéaire  $\Delta s^1 = \delta ds^1 - d\delta s^1 = w_{\alpha\beta}^1 ds^\alpha \delta s^\beta \pmod{ds^1}$ ; ( $\alpha, \beta = 2, \dots, n$ ) où  $ds^2, \dots, ds^n$  constituent avec  $ds^1$ ,  $n$  formes indépendantes, la classe est égale à  $2p + 1$ . Etant donné un système de Pfaff (S)  $ds^h = \lambda_i^h dx^i = 0$  ( $h = 1, 2, \dots, m$ ) la classe de  $S$  est  $m + p$ ,  $p$  étant le nombre minimum de formes  $ds^{m+1}, \dots, ds^n$  qu'on peut laisser figurer dans les covariants  $\Delta s^h = w_{\alpha\beta}^h ds^\alpha \delta s^\beta \pmod{ds^h}$  ( $\alpha, \beta = m + 1, \dots, n$ ). Une équation de  $S$  sera en général de classe  $m + p$  où  $m + p - 1$ , suivant que  $m + p$  est impair ou pair. Les A. se proposent de démontrer qu'on peut choisir  $m$  équations qui soient au plus de classe  $p$  ou  $p + 1$ , suivant que  $p$  est impair ou pair. On donne la démonstration du théorème pour  $p = 2, 3, 4$ . Pour  $p = 2$  la dém. résulte aussi du fait que l'espèce (nombre minimum de différentielles)  $\sigma$  de  $S$  est  $m + 1$  et l'on peut écrire  $ds^h = dx^h - a^h dx^{n-1} = 0$ , ce qui nous dit que chaque équation est au plus de classe trois. Il en est de même pour chaque système d'espèce  $\sigma = m + 1$ . Pour  $p = 3$  et  $\sigma = m + 2$  le système peut s'écrire  $ds^h = dx^h - a^h dx^{n-2} - b^h dx^{n-3} = 0$ , chaque équation étant au plus de classe cinq. Par des combinaisons convenables on obtient des équations de classe trois, mais ce fait ne sera pas visible dans la forme même des équations, comme dans le cas  $\sigma = m + 1$  et en général pour  $\sigma = m + s$  où  $2s \leq p$ , quand le théorème est démontré par la forme canonique  $ds^h = dx^h - a_\kappa^h dx^{m+\kappa} = 0$ , ( $\kappa = 1, 2, \dots, s$ ).

*G. Vranceanu* (București).

**Kasner, Edward, and John de Ciceo:** Transformation theory of integrable double-series of lineal elements. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 93—100 (1940).

Eine Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Elementen  $x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)$  heißt



integrierbar, wenn die Funktionen  $z, p, q$  der partiellen Differentialgleichung  $q = z_x + pz_y$  genügen. Es werden Transformationen von Elementen von der Form  $X = X(x, y, z, p, q)$ ,  $Y = Y(\dots)$ ,  $Z = Z(\dots)$ ,  $P = P(\dots)$ ,  $Q = Q(\dots)$  betrachtet, wobei nur  $|X_x, X_y, X_z, X_p, X_q| \neq 0$  vorausgesetzt wird. Das Resultat ist folgendes: Die Gruppe der Transformationen, die jede integrierbare Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Elementen wieder in eine solche transformieren, ist die Gruppe der verallgemeinerten Punkttransformationen  $X = X(x, y, z)$ ,  $Y = Y(x, y, z)$ ,  $Z = Z(x, y, z)$ ,  $P = (Y_x + pY_y + qY_z) : (X_x + pX_y + qX_z)$ ,  $Q = (Z_x + pZ_y + qZ_z) : (X_x + pX_y + qX_z)$ .  
O. Borůvka (Brünn).

### **Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

**Rothe, Erich:** Asymptotic solution of a boundary value problem. Iowa State Coll. J. Sci. 13, 369—372 (1939).

Es wird bewiesen: Die Lösung  $y(x, \lambda)$  des Randwertproblems

$$y'' + \lambda(y' - y) = \lambda f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

mit positivem  $\lambda$  und im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  stetigem  $f(x)$  konvergiert im Bereich  $0 < x \leq 1$  mit unbegrenzt wachsendem  $\lambda$  gegen die Lösung  $\eta(x)$  der Randwertaufgabe erster Ordnung  $\eta' - \eta = f(x)$ ,  $\eta(1) = 0$ . Fragestellung und Beweismethode knüpfen an frühere Arbeiten des Verf. an (dies. Zbl. 7, 115; 8, 16; 14, 403). Schoblik (Brünn).

**Kamke, E.:** Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. II. Math. Z. 46, 231—250 (1940).

Mit den linearen Differentialoperatoren

$$F(y) = \sum_{\nu=0}^m (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y) = \sum_{\nu=0}^n (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}$$

der Ordnung  $2m > 2n$  sei die Randwertaufgabe (1)  $F(y) - \lambda \cdot G(y) = 0$  bei den  $2m$  in den  $y^{(j)}(a)$ ,  $y^{(j)}(b)$ ,  $j = 0, \dots, 2m - 1$  linearen Randbedingungen, (2)  $U_\mu(y) = 0$  ( $\mu = 1 \dots 2m$ ) im Intervall  $a \leq x \leq b$  vorgelegt; die Koeffizientenmatrix der  $U_\mu(y)$  habe den Rang  $2m$ , und die Randwertaufgabe (1), (2) sei für jeden Wert  $\lambda$  selbstadjungiert. Die Randwertaufgabe heißt normal, wenn jede Eigenfunktion  $\psi$  die Ungleichung  $\int_a^b \bar{\psi} G(\psi) dx \neq 0$  [ $\bar{\psi}$  konjugiert-komplex zu  $\psi$ ] erfüllt, was z. B. der Fall ist,

wenn a)  $G(y) = g(x)y$ ,  $g(x) \geq 0$ , aber nicht identisch Null, oder b) jede zulässige, d. h.  $2m$ -mal stetig differenzierbare und (2) erfüllende Funktion  $u(x) \neq 0$  die Ungleichung  $\int_a^b u G(u) dx > 0$  [oder  $\geq 0$ , falls  $\lambda = 0$  kein Eigenwert ist] befriedigt.

Mittels eines Fundamentalsystems von (1) stellt man dann in bekannter Weise die charakteristische Determinante  $\Delta(\lambda)$  der Aufgabe (1), (2) her, deren Nullstellen die Eigenwerte liefern. Diese sind, falls überhaupt vorhanden, sämtlich reell und höchstens abzählbar unendlich viele; sie besitzen im Endlichen keinen Häufungspunkt. Die Vielfachheit eines Eigenwertes ist gleich seiner Vielfachheit als Nullstelle von  $\Delta(\lambda)$ ; zu der Folge der Eigenwerte gehört eine Folge von Eigenfunktionen, die ein vollständiges Orthonormalsystem mit  $\int_a^b \psi_\mu G(\psi_\nu) dx = \delta_{\mu\nu}$  bilden. Zur selbstadjungierten

normalen Randwertaufgabe (1), (2) kann man in üblicher Weise eine Greensche Resolvente  $\Gamma(x, \xi; \lambda)$  bilden; sie hat im  $\lambda$  höchstens Pole 1. Ordnung in den Nullstellen von  $\Delta(\lambda)$ ; ist  $\lambda_0$  ein  $k$ -facher Eigenwert mit den zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen  $\psi_1 \dots \psi_k$ , so ist das Residuum von  $\Gamma(x, \xi; \lambda)$  an der Stelle  $\lambda = \lambda_0$  gleich  $-\sum_{\nu=1}^k \psi_\nu(x) \psi_\nu(\xi)$ . — Der Wert der Arbeit liegt in der Übertragung dieser für spezielle

Operatoren  $F(y)$ ,  $G(y)$  bekannten Tatsachen auf den allgemeinsten Fall. (Vgl. dies. Zbl. 22, 142.)

Harald Geppert (Berlin).



**Kamke, E.:** Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. III. Math. Z. 46, 251—286 (1940).

Im Anschluß an die vorstehend besprochene Arbeit behandelt Verf. die selbstadjungierte Aufgabe (1), (2) unter der weiteren Annahme, daß sie definit bzw. eigentlich definit sei, d. h. daß die zulässigen Funktionen  $u(x) \neq 0$  die Ungleichungen:

$$J(u) = \int_a^b u F(u) dx \geq 0 \text{ bzw. } > 0 \text{ erfüllen und daß, wenn hier die Gleichheit steht,}$$

$$K(u) = \int_a^b u G(u) dx \neq 0 \text{ ein festes Vorzeichen hat. Die Aufgabe ist dann normal.}$$

Sie besitzt unendlich viele Eigenwerte, und zwar beweist man zunächst, daß zwischen 0 und  $\rho(u) = J(u) : K(u)$ , gebildet mit einer zulässigen Funktion, für die  $K(u) \neq 0$  ist, mindestens ein Eigenwert liegt; ist die Aufgabe eigentlich definit, so ist sogar  $\lambda_1 = \min \rho(u)$  unter allen zulässigen Funktionen  $u$  mit  $K(u) > 0$ , und das Minimum wird für die erste Eigenfunktion  $u = \psi_1(x)$  angenommen. Ähnlich erfaßt man in der Rayleighschen Manier die höheren Eigenwerte  $\lambda_n$  durch Einschränkung der zulässigen Funktionen auf die zu  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  orthogonalen Funktionen. Weiter lassen sich hinreichende Kriterien angeben, wann es unendlich viele positive Eigenwerte gibt, z. B. tritt dies ein, wenn in  $(a, b)$  ein Teilintervall existiert, in dem alle  $(-1)^n g_\nu(x) \geq 0$  ( $\nu = 0, \dots, n$ ) sind und mindestens eines  $> 0$  ist. Zu einer zulässigen Funktion  $\Phi(x)$

bildet man die Fourierkoeffizienten  $a_\nu = \text{sign } \lambda_n \cdot \int_a^b \Phi(x) G(\psi_\nu) dx$  und beweist für sie

die Besselsche Ungleichung  $\sum |\lambda_\nu| a_\nu^2 \leq J(\Phi)$  und die Parsevalsche Gleichung  $\sum \text{sign } \lambda_\nu \cdot a_\nu^2 = K(\Phi)$ ; bei eigentlich definiten Aufgaben konvergieren dann die Reihen  $\sum a_\nu \psi_\nu^{(\mu)}(x)$  ( $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ ) absolut und gleichmäßig und stellen sogar  $\Phi^{(\mu)}(x)$  dar, wenn noch die Voraussetzung der Abgeschlossenheit erfüllt ist; letztere wird so definiert: durch Elimination der Ableitungen der Ordnungen  $\geq m$  erhalte man aus (2) [vgl. vorstehendes Referat] die Randbedingungen  $U_\mu^*(y) = 0$ , dann soll  $Y(x) \equiv 0$  die einzige  $(m-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion mit  $U_\mu^*(Y) = 0$  sein, bei

der für jede zulässige Funktion  $u(x)$  gilt:  $\int_a^b Y(x) G(u(x)) dx = 0$ . Diese Definition

formt Verf. weiterhin so um, daß bei einer konkret gegebenen Aufgabe die Frage nach der Abgeschlossenheit unmittelbar entschieden werden kann. Schließlich kann man die Eigenwerte und -funktionen auch in der Courantschen Art durch ein Maximum-Minimumprinzip in nichtrekursiver Form erfassen. Zur praktischen Berechnung der Eigenwerte kann man entweder das Verfahren von Ritz-Galerkin übertragen oder ein Iterationsverfahren anwenden, indem man eine Funktionenfolge  $y_\nu(x)$  mit  $F(y_{\nu+1}) = G(y_\nu)$ ,  $U_\mu(y_{\nu+1}) = 0$  ( $\mu = 1, \dots, 2m$ ),  $G(y_0) \neq 0$  bildet; dann ist

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (y_{\nu-1} : y_\nu)$  und  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha_{\nu-1} : \alpha_\nu)$  mit  $\alpha_\nu = \int_a^b y_\nu G(y_{\nu-\varrho}) dx$ , ( $0 \leq \varrho \leq \nu$ ) ein Eigenwert.

Harald Geppert (Berlin).

**Langer, Rudolph E.:** The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 151—190 (1939).

Die behandelten Differentialsysteme sind von der Form (1)  $y' = (\lambda \Re(x) + \Omega(x, \lambda)) y$ . Hier sind  $x$  und der Parameter  $\lambda$  komplex,  $\Re, \Omega$   $n$ -reihige quadratische Matrizen,  $\Re(x) = (\delta_{ij} r_i(x))$  von Diagonalform,  $y$  die gesuchte Lösungsspalte. Die Randbedingungen verknüpfen die Lösungswerte an  $m$  ( $\geq 2$ ) Punkten  $\eta^{(\mu)}$  der komplexen Ebene durch  $n$  lineare homogene Gleichungen; der Hauptgegenstand ist die Existenz und asymptotische Verteilung der Eigenwerte und der Beweis eines Entwicklungssatzes für Systeme analytischer Funktionen nach Eigenlösungen. Den Erfordernissen der einzelnen Stufen der Betrachtung entsprechend werden die Voraussetzungen Schritt für Schritt verengert. — Im einzelnen bringt Teil I vorbereitende Untersuchungen über die Abhängigkeit der



Lösungen vom Parameter. Zugrunde gelegt wird ein Gebiet der  $x$ -Ebene, in dem die  $r_i(x)$  regulär und beschränkt sind, ferner die Differenzen  $|r_i - r_j| \geq \delta > 0$  sind; die Matrix  $\Omega(x, \lambda)$  soll für  $\lambda \rightarrow \infty$  (in einem Gebiet) eine asymptotische Entwicklung

$\sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{-h} \Omega^{(h)}(x)$  mit regulären beschränkten Koeffizienten  $\Omega^{(h)}(x)$  gestatten. Es gibt dann insbesondere eine Integralmatrix  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{P}(x, \lambda) \mathfrak{G}(x, \lambda)$  mit  $\mathfrak{G}(x, \lambda) = (\delta_{ij} e^{\lambda R_i(x)})$ ,

$R'_i(x) = r_i(x)$ ,  $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Z} + \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{-h} \mathfrak{P}^{(h)}(x)$ , wenn  $x, \lambda$  auf ein Paar „zugeordneter Gebiete“

$X, \Lambda$  beschränkt werden; dies bedeutet, daß auf dem Rand von  $X$  ein von  $\lambda \in \Lambda$  unabhängiges Punktsystem  $x_{*}^{(i,j)}$  existiert, für das die Bilder  $\xi^{(i,j)}, \xi_{*}^{(i,j)}$  von  $x, x_{*}^{(i,j)}$  vermöge  $\xi^{(i,j)} = \lambda(R_i(x) - R_i(x_{*}^{(i,j)}))$  sich im Bild von  $X$  durch je einen Weg mit  $\operatorname{Re} \xi^{(i,j)} \uparrow \operatorname{Re} \xi_{*}^{(i,j)}$  verbinden lassen (dies wird in einleuchtender Weise zur Integralabschätzung verwertet!).

— In Teil II wird das Randwertproblem formuliert: (2)  $\sum_{\mu=1}^m \mathfrak{B}^{(\mu)}(\lambda) \eta(\eta_{\mu}, \lambda) = 0$ .

Der Versuch, eine Lösung aus einem Fundamentalsystem von (1) linear zu kombinieren, führt in der üblichen Weise zu einer (transzendenten) Gleichung  $D(\lambda) = 0$  für die Eigenwerte. Dem Problem läßt sich ein „adjungiertes“ zuordnen, bei dem  $m$  Lösungszeilen von (1)'  $\mathfrak{z}' = -\mathfrak{z}(\lambda \mathfrak{R} + \Omega)$  gesucht werden, mit Randbedingungen, die

$\sum_{\mu=1}^m \int_{\eta_0}^{\eta_{\mu}} d(\mathfrak{z}^{(\mu)}(x, \lambda) \eta(x, \lambda)) = 0$  bewirken (vgl. die Greensche Formel im klassischen Fall);

$\eta_0$  ist ein hinzugewählter fester Punkt, der auch mit einem der  $\eta_{\mu}$  zusammenfallen kann. Das nichthomogene Problem führt zur Einführung eines Systems „Greenscher Matrizen“  $\mathfrak{G}^{(\mu)}(x, x_1, \lambda)$ . Diese Zusammenhänge werden übrigens auch für den eindimensionalen Fall erörtert, wo  $x$  auf ein System von  $\eta_0$  mit den  $\eta_{\mu}$  verbindenden Kurven beschränkt ist (die auch stückweise zusammenfallen dürfen, wobei die Annahmen über (1) sinngemäß abzuändern sind). Es besteht dann in vieler Hinsicht Analogie zu den klassischen Verhältnissen von Bedingungen für die Enden eines Intervalls; jetzt aber braucht auch im Falle eines solchen  $m$  nicht  $= 2$  zu sein! — Liegen nun die  $\eta_{\mu}$  in einem geeigneten Gebiet, und gestatten die  $\mathfrak{B}^{(\mu)}(\lambda)$  gewisse asymptotische Entwicklungen, so kann das in Teil I konstruierte Fundamentalsystem benutzt werden; es wird  $D(\lambda)$  eine Funktion vom „Exponentialtyp“, deren Nullstellenverteilung weitgehend bekannt ist [vgl. Langer, Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 213—239 (1931); dies. Zbl. **1**, 344]. — In Teil III wird u. a.  $\Omega$  als von  $\lambda$  frei angenommen; die Elemente von  $\mathfrak{B}^{(\mu)}$  sollen rationale, also ohne Einschränkung der Allgemeinheit ganze rationale Funktionen von  $\lambda$  sein; die dann ganze Funktion  $D(\lambda)$  soll bei ihrer Darstellung als Exponentialsumme mindestens zwei Glieder liefern. Dann steht die Existenz unendlich vieler Eigenwerte fest. Verallgemeinerte Biorthogonalitätsrelationen verknüpfen die Lösungen der zueinander adjungierten Probleme; daraus entspringt für das Entwicklungsproblem eine Koeffizientenbestimmung auf Fouriersche Weise (Voraussetzung: Vielfachheit des Eigenwerts = Defekt des zugehörigen linearen Gleichungssystems). Andererseits bekommt man, ähnlich wie bei der klassischen Cauchyschen Methode, die Reihenglieder durch Residuenbetrachtung an Greenschen Matrizen [das einem Eigenwert  $\lambda_v$  entsprechende Reihenglied ist im wesentlichen

$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_v} \sum_{\mu=1}^m \int_{\eta_0}^{\eta_{\mu}} \mathfrak{G}^{(\mu)}(x, x_1, \lambda) R(x_1) f(x_1) dx_1$ , wenn  $f(x)$  der zu entwickelnde Vektor ist]

und hierdurch gelangt man schließlich zu einem Entwicklungssatz, wobei ein im Laufe der Betrachtung eingeführtes neues Postulat („Regularität“ eines Randwertproblems in einem Punkt  $x$  oder einem Gebiet), das kaum in Kürze wiedergegeben werden kann, den glatten Verlauf der durch die große Allgemeinheit belasteten Betrachtungen gewährleistet.

Herm. Schmidt (Jena).



**Langer, Rudolph E.:** A correction to „The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain“. Trans. Amer. Math. Soc. **46**, 467 (1939).

Druckfehlerberichtigung ohne Änderung der Hauptergebnisse (s. vorsteh. Ref.).  
Geppert.

**Krein, M.:** Sur les fonctions de Green non-symétriques oscillatoires des opérateurs différentiels ordinaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **25**, 643—646 (1939).

In Verallgemeinerung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **12**, 168, 169; **13**, 49, 208; **14**, 64; **16**, 23) gibt Verf. — meist ohne Beweis — einige neue Resultate über nicht-symmetrische Oszillationskerne an. Es wird u. a. behauptet: Wenn für einen selbstadjungierten Operator der Ordnung  $n$  und zu den Randbedingungen

$$(2) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad (i = 1, \dots, p), \quad (j = 1, \dots, q), \quad (p + q = n)$$

eine Greensche Funktion existiert, welche, mit  $(-1)^q$  multipliziert, einen Oszillationskern ergibt, dann gilt dasselbe auch für die Bedingungen

$$(3) y^{(i)}(a) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, p-1); \quad \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad (j = 1, \dots, q)$$

und die zugehörige Greensche Funktion  $G^{(p)}(x, s)$ , desgl. auch für die Bedingungen

$$(4) y(a) = \dots y^{(p-1)}(a) = 0, \quad y(b) = \dots y^{(q-1)}(b) = 0$$

und die zugehörige Greensche Funktion  $G^{(p,q)}(x, s)$ . Notwendig und hinreichend dafür, daß  $G^{(p,q)}(x, s)$  ein Oszillationskern wird, ist z. B., daß der Operator  $L(y)$  in der Form

$$(5) L(y) = \varrho_0 \frac{d}{dx} \varrho_1 \frac{d}{dx} \varrho_2 \dots \frac{d}{dx} \varrho_n y$$

mit positiven und  $k$ -fach differenzierbaren  $\varrho_k(x)$  darstellbar ist. Für die Integralgleichung  $\varphi(x) = \int_a^b G(x, s) \varphi(s) d\sigma(s)$  gilt Ähnliches wie im symmetrischen Falle; insbesondere sind die Eigenwerte einfach und von gleichem Vorzeichen. Es werden weiter die Eigenwerte der Kerne  $G, G^{(p)}, G^{(p,q)}$  in Beziehung gebracht. Tarutz.

**Krein, M.:** Les théorèmes d'oscillation pour les opérateurs linéaires différentiels d'ordre quelconque. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **25**, 719—722 (1939).

Verf. betrachtet das Differentialsystem  $L(y) - \lambda \varrho y = 0$  [ $\varrho \geq 0$  und sumabel,  $L(y)$  definiert wie in (5) des vorsteh. Referates] mit den Randbedingungen  $y(a) = y'(a) = \dots y^{(p-1)}(a) = 0$ . Unter den aufgeführten Sätzen seien folgende hervorgehoben:  $\omega_i(x, \lambda)$  seien  $q$  linear unabhängige Lösungen des Systems.  $\lambda_k = \lambda_k(b)$  seien die Eigenwerte des Problems  $L(y) - \lambda \varrho y = 0$  mit den Bedingungen (4) (vgl. vorsteh. Referat). Für  $(-1)^q \lambda_{k-1} \leq (-1)^q \lambda < (-1)^q \lambda_k$  besitzt die Wronskische Determinante  $W_q(x, \lambda)$  der  $\omega_i(x, \lambda)$  im rechteoffenen Grundintervall  $(a, b)$   $k$  einfache Nullstellen, die abnehmende Funktionen von  $(-1)^q \lambda$  sind. Bei passender Normierung der  $\omega_i$  gilt

$$W_q(\xi, \lambda) = W_q(\xi, 0) \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k(\xi)}\right). \quad (a < \xi \leq b)$$

Für die Randbedingungen

$$y(a) = y'(a) = \dots y^{(p-1)}(a) = 0, \quad y^{(p)}(a) = 1; \quad y(b) = y'(b) = \dots y^{(q-2)}(b) = 0$$

gibt es genau eine Lösung  $\varphi_q(x, \lambda)$ , welche für das obige  $\lambda$ -Intervall im Innern von  $(a, b)$   $k$  einfache Nullstellen besitzt. Es werden dann noch allgemeinere Randbedingungen in Betracht gezogen und entsprechende Sätze auch für Quasidifferentialoperatoren angegeben. Tarutz.

**Bourgin D. G., and R. Duffin:** The Laplace Heaviside method for boundary value problems. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 869—869 (1939).

Während die üblichen Methoden zur Lösung von Randwertproblemen linearer Differentialgleichungen von Linearkombinationen partikulärer Integrale mit unbestimmten Koeffizienten ausgehen und in der Hauptsache in der Berechnung dieser



unbestimmten Koeffizienten bestehen, werden in der vorliegenden Arbeit zwei gänzlich anders geartete, auf der Laplacetransformation beruhende Verfahren entwickelt. Auf das Randwertproblem

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) y \equiv \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = r(x),$$

$$U_i(a, b) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{i\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{i\nu} y^{(\nu)}(b) = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit linearem  $a_{\nu}(x)$  und konstantem  $\alpha_{i\nu}$ ,  $\beta_{i\nu}$ , sowie  $d_i$  angewendet, bestehen sie im wesentlichen darin, die Gleichung  $L\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = r(x)$  mit Hilfe der Greenschen Operation  $\int_a^b \left[ e^{-xp} L\left(x, \frac{d}{dx}\right) y(x) - y(x) \bar{L}\left(x, \frac{d}{dx}\right) e^{-xp} \right] dx$  (wo  $\bar{L}$  den zu  $L$  adjungierten Differentialausdruck bezeichnet) zunächst in eine Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt

$$L_0(p) F(p) - \frac{d}{dp} [L_1(p) F(p)] = R(p; y(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), \dots, y^{(n-1)}(b))$$

mit der Unbekannten  $F(p) = \int_a^b e^{-xp} y(x) dx$  (und bekannten  $L_0$ ,  $L_1$  und  $R$ ) überzuführen, die hierauf durch nochmalige Anwendung einer ähnlichen Greenschen Operation in ein System von  $n$  algebraischen (u. zw. linearen) Gleichungen für die Größen  $y(a)$ ,  $y'(a)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(a)$ ,  $y(b)$ ,  $y'(b)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(b)$  verwandelt werden kann. Diese Gleichungen in Verbindung mit den Randbedingungen gestatten, die angeschriebenen Randwerte aus der Gleichung für  $F(p)$  zu eliminieren und damit  $F(p)$ , also auch die zu  $F(p)$  gehörige Dingfunktion  $y(x)$  zu berechnen (1. Methode). Durch eine etwas andere Führung des letzten Teiles des beschriebenen Verfahrens gelingt es übrigens auch,  $y(x)$  direkt zu ermitteln (2. Methode). Die entwickelten Verfahren lassen sich mit Erfolg auch auf Eigenwertprobleme sowie auf partielle Differentialgleichungen anwenden.

Schoblik (Brünn).

**Jaeger, J. C.:** The Laplace transformation method in elementary circuit theory. Math. Gaz. 24, 42—50 (1940).

Esposizione di noti procedimenti d'integrazione, mediante la trasformata di Laplace, delle equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti costanti, relative a problemi elementari sui circuiti elettrici.

M. Picone (Roma).

**Lowan, A. N.:** Correction to „On Green's functions in the theory of heat conduction in spherical coordinates“. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 951—952 (1939).

Berichtigung zu der in dies. Zbl. 18, 309 besprochenen Arbeit des Verf. Der dort angegebene Ausdruck für die Greensche Funktion ist fehlerhaft; der richtige Ausdruck und einige nötige Abänderungen der anderen Formeln sind angegeben.

H. Geppert (Berlin).

**Mindlin, J. A.:** Le problème aux limites de l'équation des ondes dans le cas du cercle. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 32—36 u. franz. Zusammenfassung 36 (1938) [Russisch].

Verf. löst die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

unter den Anfangsbedingungen  $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  für  $t = 0$  und den Randbedingungen  $u = \alpha_n(t) \cos n\theta$  bzw.  $\alpha_n(t) \sin n\theta$  für  $r = 1$ . Mittels des Whittakerschen Ansatzes erhält man

$$u = \int_0^\pi A_n(r \cos \xi + at) \cdot \cos n\xi d\xi \cdot \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases},$$

worin sich die Funktion  $A_n$  aus der Volterraschen Integralgleichung 1. Art

$$(1) \quad \int_1^x A_n(y) \cdot \frac{T_n(y-x+1)}{\sqrt{1-(y-x+1)^2}} dy = \alpha_n\left(\frac{x-1}{a}\right)$$



bestimmt, in deren singulären Kern die Tschebyscheffschen Polynome  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$  eingehen. Setzt man

$$I_n(x) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i} J_n\left(xe^{\frac{\pi i}{2}}\right) \quad \text{für } -\pi < \arg x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$= e^{\frac{3}{2}n\pi i} J_n\left(xe^{-\frac{3\pi i}{2}}\right) \quad \text{für } \frac{\pi}{2} < \arg x \leq \pi$$

( $J_n$  = Besselsche Funktion) und bildet damit

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{sz} \frac{e^s}{s I_n(s)} ds$$

mit genügend großem positivem  $\delta$ , so lautet die Lösung von (1):

$$A_n(y) = \int_1^y H_n(y-z) \cdot \frac{d}{dz} \alpha_n\left(\frac{z-1}{a}\right) \cdot dz.$$

Harald Geppert (Berlin).

**Mangeron, Demetrio:** Sulle equazioni lineari a derivate parziali di tipo „composito“ secondo Hadamard. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 18—25 (1939).

Se esiste una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

verificante le condizioni di Cauchy  $\left(\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right)_{y=0} = S_i(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), detta soluzione è suscettibile dello sviluppo in serie

$$u(x, y) \sim \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \operatorname{sen} k\rho(x-a), \quad \rho = \frac{\pi}{b-a},$$

dove  $u_k(y)$  è la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^4 u_k}{dy^4} - (k\rho)^4 u_k = k\rho[S_0''(a) - (-1)^k S_0''(b)] - (k\rho)^3[S_0(a) - (-1)^k S_0(b)]$$

verificante le condizioni iniziali

$$u_k^{(i)}(0) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^b S_i(\xi) \operatorname{sen} k\rho(\xi-a) d\xi. \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

L'A. assegna inoltre vari tipi di condizioni per le  $S_i(x)$  atte ed assicurare l'esistenza della  $u(x, y)$  ed è notevole il fatto che tali condizioni non implicano la analiticità delle  $S_i(x)$ . Il metodo di cui si vale l'A., che è poi quello cosiddetto delle trasformate di M. Picone (questo Zbl. 16, 213), è applicabile anche allo studio del problema di Cauchy per l'equazione  $D(E(u)) = f(x, y)$  con

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta(y) \frac{\partial}{\partial y} + \gamma(y),$$

$$E = a_{20}(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{02}(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(y) \frac{\partial}{\partial y} + a(y), \quad (a_{20}a_{02} > 0).$$

C. Miranda (Torino).

**Solovieff, P. V.:** Sur les solutions périodiques de certaines équations non-linéaires du quatrième ordre. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 731—734 (1939).

L'A. considera l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{(2k+1)^2}{\pi^2} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \Phi(x, t) + \mu f(z),$$

$k$  essendo un numero intero,  $f(z)$  una funzione dispari di  $z$ ,  $\Phi(x, t)$  una funzione nulla per  $x=0$  e  $x=1$ , periodica di periodo 1 rispetto a  $t$ , e dimostra, sotto convenienti ipotesi di carattere qualitativo per le funzioni  $\Phi$  ed  $f$ , che detta equazione ammette, per  $\mu$  abbastanza piccolo, un integrale verificante le condizioni  $z(0, t) = z(1, t) = z_{xx}(0, t) = z_{xx}(1, t) = 0$ ;  $z(x, 0) = z(x, 1)$ ,  $z_t(x, 0) = z_t(x, 1)$ . C. Miranda.



**Davis, Arthur W.:** Differentiability and continuity properties of solutions of certain partial differential equations of applied mathematics. Iowa State Coll. J. Sci. **14**, 20—21 (1939).

**Eiehler, M.:** Allgemeine Integration einiger partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch Quaternionenfunktionen. Comment. math. helv. **12**, 212—224 (1940).

Die Regularitätsbedingungen der Fueterschen Funktionentheorie einer Quaternionenvariablen  $z = x + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$  liefern für Funktionen  $F(z)$ , die nicht von der reellen Komponente  $x$  der Variablen  $z$  abhängen, die Differentialgleichungen für das stationäre elektromagnetische Feld im unmagnetischen Leiter, sofern man den Realteil von  $F(z)$  als elektrisches Potential und die imaginären Komponenten als Komponenten der magnetischen Feldstärke auffaßt. Aus der Fueterschen Integralformel ergibt sich dann durch eine einfache Rechnung die Lösung der Randwertaufgabe für stationäre elektromagnetische Felder. Insbesondere wird für statische Felder die Poissonsche Integralformel für die dreidimensionale Kugel hergeleitet. — Eine neue symbolische Potenzreihenentwicklung der Quaternionenfunktionen ermöglicht es, allgemeine Sätze über die Integrale der Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu, \nu=1}^3 a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0 \quad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}, |a_{\mu\nu}| = \pm 1)$$

zu beweisen. Als Beispiel weist der Verf. auf eine einfache Herleitung der Sätze über die Entwicklung von Potentialfunktionen nach Kugelfunktionen hin. *Sommer.*

**Privaloff, I. I., et P. Kouznetzoff:** Sur les problèmes limites et les classes différentes de fonctions harmoniques et subharmoniques définies dans un domaine arbitraire. Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 345—375 u. franz. Zusammenfassung 376 (1939) [Russisch].

Die von Privaloff in früheren Arbeiten (dies. Zbl. **18**, 408; **19**, 118, 119) für harmonische und subharmonische Funktionen, deren Definitionsgebiet die Einheitskugel ist, gefundenen Ergebnisse werden hier auf den Fall erweitert, daß das Definitionsgebiet von einer beliebigen Fläche  $F$  begrenzt wird, die nur der Liapunoffschen Bedingung zu genügen braucht, daß für den Winkel  $\theta$  zwischen den Normalen auf  $F$  in den beliebigen Punkten  $P$  und  $Q$  eine Ungleichung der Form  $\theta \leq \text{konst } \overline{PQ}^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , besteht. *H. Geppert (Berlin).*

**Szegö, G.:** On the gradient of solid harmonic polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 51—65 (1940).

Einen früheren Satz von S. Bernstein präzisierend, bewies Verf.

(dies. Zbl. **15**, 401), daß, wenn  $u(x, y)$  ein harmonisches Polynom  $n$ -ten Grades ist und  $|u(x, y)| \leq 1$  für  $x^2 + y^2 \leq 1$  gilt, dann  $|\text{grad } u| = [u_x^2 + u_y^2]^{1/2} \leq n$  für  $x^2 + y^2 \leq 1$  ist (das =-Zeichen kann dabei für bestimmte Polynome gelten). In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen: Wenn  $u(x, y, z)$  ein harmonisches Polynom  $n$ -ten Grades von 3 Variablen und  $|u(x, y, z)| \leq 1$  für  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  ist, dann gilt für  $n \geq 4$  und  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ :

$$|\text{grad } u| = [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2]^{1/2} \leq 2n \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) + \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases},$$

je nachdem  $n$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Fälle, in denen das =-Zeichen gilt, werden genau bestimmt. Für  $n = 2, 3$  gilt eine schwächere Ungleichung. Die beachtenswerte Schwierigkeiten bietende Beweisführung knüpft nur teilweise an die der eigenen früheren Arbeit an. *L. Cesari (Pisa).*

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

**Soupline, M.:** Résolution des équations intégrales du type d'Abel. Rec. Trav. Inst. Math. Nr **3**, 113—118 u. franz. Zusammenfassung 120—121 (1940) [Ukrainisch].

Die Arbeit enthält die Lösung fünf verschiedener Typen Abelscher Integral-



gleichungen. Beispielsweise wird die Gleichung

$$f(x) = \lambda \int_a^x [(x-a)^p - (t-a)^p]^\alpha \varphi(t) dt$$

für  $-1 < \alpha < 0$ ,  $p \neq 0$  und stetiges  $f'(x)$  gelöst durch

$$\varphi(x) = \frac{-p \sin \alpha \pi}{\lambda \pi} (x-a)^{p-1} \left[ f(a) + \int_a^x [(x-a)^p - (t-a)^p]^{-1-\alpha} f'(t) dt \right],$$

hingegen für  $0 < \alpha < 1$ ,  $p > 0$  und stetige  $f(x) \cdot (x-a)^{-p\alpha}$  und  $f''(x)$  durch

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\lambda \pi \alpha} \cdot \frac{1}{x-a} \int_a^x [(x-a)^p - (t-a)^p]^{-\alpha} \cdot [(1-p\alpha) f'(t) + (t-a) f''(t)] dt.$$

Beweis ähnlich wie bei der klassischen Abelschen Gleichung.

*Harald Geppert.*

**Goldfain, I.:** Sur un cas particulier d'une équation intégrale linéaire de Fredholm à noyau non symétrique. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 149—157 u. franz. Zusammenfassung 158—159 (1939) [Russisch].

L'auteur considère l'équation de Fredholm dont le noyau est de la forme

$$K_n(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i(x) \alpha_j(y) \quad (1)$$

où les fonctions  $\alpha_i(x)$  forment un système orthogonal et normé dans un intervalle  $[a, b]$  et les constantes  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) sont réelles ou complexes et telles qu'en général  $a_{ij} \neq a_{ji}$ ; le nombre  $n$  est fixe. On suppose que le déterminant  $|a_{ij}| \neq 0$ . Le noyau (1) possède  $n$  fonctions fondamentales normées à droite et à gauche:  $\varphi_k^{(n)}(x)$  et  $\psi_k^{(n)}(x)$ ,

$\varphi_k^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n b_{ki} \alpha_i(x)$ ,  $\psi_k^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n c_{ki} \alpha_i(x)$ . L'auteur montre comme le noyau (1) s'exprime au moyen de ces fonctions; il donne enfin une expression du noyau résolvant de (1) au moyen des fonctions  $\varphi_k^{(n)}$  et  $\psi_k^{(n)}$ .

*B. Hostinský* (Brünn).

**Wagner, Karl Willy:** Über Begründung und Sinn der Operatorenrechnung nach Heaviside. Z. techn. Physik 20, 301—313 (1939).

Einführende Darstellung, in der sich Verf. vor allem um die physikalische Deutung bemüht, welche die mathematische Erfassung der Operatorenrechnung vermittelt der Laplacetransformation gestattet: Er führt aus, daß dieser der Übergang von der Zeitfunktion zu ihrem Frequenzspektrum entspricht, und verbindet dies mit der Begründung des Kalküls.

*Ullrich* (Gießen).

**Fujiwara, Matsusaburo:** Asymptotic expansions in the Heaviside's operational calculus. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 283—287 (1939).

Let  $F(z)$  be a meromorphic function whose poles do not lie in the half-plane  $\Re z = \sigma \geq c > 0$  and on the negative real axis, the origin exclusive. The author gives two sets of sufficient conditions that the solution  $h(x)$  of the equation  $F(x) x^{-1/2}$

$= \int_0^\infty e^{-xt} h(t) dt$  (or symbolically  $F(p) p^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} = h(x)$ ,  $p$  denoting  $d/dx$ ) is equal to  $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-zt} F(-t)}{\sqrt{t}} dt +$  sum of residues of  $e^{xz} F(z) z^{-1/2}$ ; this is known as Carson's

solution, and the integral term has the asymptotic expansion

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum (-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) F^{(n)}(0)/n! (2x)^k$$

which is the Heaviside's solution. The first set of conditions is that (a)  $|F(z) z^{-1/2}| \rightarrow 0$  uniformly for  $\sigma \rightarrow \infty$  and (b)  $|F(z) z^{-1/2}| \rightarrow 0$  for  $\Re z \leq c$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ . The second set of conditions is that (a), (c)  $|F(z) z^{-1/2}| \rightarrow 0$  uniformly for any finite strip  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$  as  $|t| \rightarrow \infty$  and (d)

$$\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{F(-\sigma + it)}{(-\sigma + it)^{1/2}} \right| dt = o(e^{\varepsilon \sigma}) \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

*Izumi* (Sendai).



Tricomi, Francesco: Su di un integrale doppio presentatosi in aerodinamica. Atti Accad. Sci. Torino **75**, 17—25 (1939).

Verf. betrachtet das Doppelintegral

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega x dx \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

und zeigt auf Grund der Identität

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(ty \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right),$$

daß sich dieses Integral in der folgenden Form

$$f(\omega) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega \sin \varphi \sin \psi} \sin \varphi \sin \psi d\varphi d\psi \quad \omega \geq 0$$

darstellen läßt. Die zugehörige analytische Funktion  $f^*(\omega)$ , deren positiver Realteil mit dem Integral übereinstimmt, ist dann eine ganze Funktion, die die Laplace-transformierte der Funktion

$$F(u) = \begin{cases} uK(\sqrt{1 - u^2}) & (0 \leq u \leq 1) \\ 0 & (u > 1) \end{cases}$$

ist, wobei  $K(\sqrt{1 - u^2})$  das elliptische Integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - u^2) \sin^2 \varphi}}$  ist. Für  $\omega \rightarrow \infty$  kann dann Verf. zeigen, daß die folgende Äquivalenz  $f^*(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2} \log \varphi$  besteht.

Wegner (Heidelberg).

Durañona y Vedia, A., und C. A. Trejo: Über die Umkehrung des Laplace-Stieltjes-schen Doppelintegrals. Contrib. estud. ci. fis. mat. **1**, 451—464 (1938) [Spanisch].

Die Verff. beweisen den folgenden Satz: Es sei  $\tau(\varrho, \sigma)$  eine Funktion, die im Sinne von Hardy in jedem endlichen rechteckigen Gebiet von beschränkter Schwankung ist, ferner  $c_1$  und  $c_2$  Konvergenzabszissen des Integrales

$$f(z, w) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z\varrho - w\sigma} d\tau(\varrho, \sigma),$$

dann gilt fast überall

$$\tau(\varrho, \sigma) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{z\varrho + w\sigma} \frac{f(z, w)}{zw} dz dw. \quad (k > c_1, h > c_2)$$

C. Miranda (Torino).

Goodspeed, F. M.: Some generalizations of a formula of Ramanujan. Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 210—218 (1939).

Für zwei Funktionen  $L(x)$ ,  $M(x)$  gilt unter gewissen Bedingungen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} L(x) \cos yx dx = M(y), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} M(x) \cos yx dx = L(y).$$

Dabei wird  $L(x)$  durch eine unendliche Reihe definiert, die mit einer gewissen ganzen Funktion gebildet ist. Die Bedingungen sind nun etwas allgemeiner als die von Hardy (dies. Zbl. **18**, 130). Ähnlicherweise gilt, wie Verf. zeigt, auch unter gewissen Bedingungen

$$\frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{K_1(xy)}{x} L(x) dx = M(y), \quad \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{K_1(xy)}{x} M(x) dx = L(y)$$



(Watson-Transformation); ebenso

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{L(x)}{1-x^2 y^2} dx = M(y), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{M(x)}{1-x^2 y^2} dx = L(y)$$

(Hilbert-Transformation).

*Z. Suetuna* (Tokyo).

**Alessi, Juan M.:** Über die Heinesche Transformation der dualen und bidualen Veränderlichen. *An. Soc. Ci. Argent.* **128**, 222—232 (1939) [Spanisch].

Die Heinesche Integralverwandlung einer Funktion  $\varphi(t)$  der reellen Veränderlichen  $t$  mit vorhandenem  $\int_0^1 |\varphi(t)| dt$  lautet

$$H[\varphi(t)] = f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-z}.$$

Verf. behandelt sie für eine duale oder biduale komplexe Veränderliche  $z$  auf ähnliche Weise, wie Vignaux (a. a. O. **126**, 401—428; **127**, 161—185; dies. Zbl. **21**, 401) gewisse Integralverwandlungen untersucht hat.

*Koschmieder* (Graz).

**Mohan, Brij:** Self-reciprocal functions involving Laguerre polynomials. *J. Indian Math. Soc., N. s.* **3**, 268—270 (1939).

Verf. setzt sich zum Ziel, zu beweisen, daß die Funktion

$$x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} L_n^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

selbstreziprok ist in einer Transformation mit einem Kern, der  $J_{\nu}$  enthält. Hierzu geht er von einem Ergebnis von Hardy und Titchmarsh (dies. Zbl. **7**, 63) aus, die eine allgemeine komplexe Integralformel angeben für eine Funktion  $f$ , welche in einem gewissen Gebiet der komplexen Integrationsebene diese Selbstreziprozität aufweist. Beim Beweis des gewünschten Satzes beschränkt sich Verf. darauf, zu zeigen, daß die eingangs genannte Funktion der genannten komplexen Integralformel genügt. Als Ausgangspunkt dient hierbei die Soninesche Integralformel:

$$\int_0^{\infty} e^{-(s+1)x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \frac{s^{\alpha}}{(1+s)^{n+\alpha+1}},$$

sowie die Howellsche Integralformel:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha+p-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) dx = \frac{\Gamma(p+\alpha)\Gamma(n+1-p)}{n!\Gamma(1-p)}.$$

Hierbei sind  $L_n^{\alpha}$  Laguerresche Polynome.

*M. Strutt* (Eindhoven).

**Krein, M.:** Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* **26**, 17—22 (1940).

Der Satz von Bochner (dies. Zbl. **6**, 110), daß die Klasse der in  $(-\infty, \infty)$  hermiteschen Funktionen mit nichtnegativer hermitescher Form  $\sum_{j,k=1}^n f(x_j - x_k) \xi_j \bar{\xi}_k$  (Klasse  $\mathfrak{P}_{\infty}$ ) mit der Klasse der Funktionen, die eine Fourier-Stieltjes-Integraldarstellung mit monoton steigender Belegungsfunktion gestatten, zusammenfällt, wird für die Funktionen der Klasse  $\mathfrak{P}_A$ , welche nur im endlichen Intervall  $(-A, A)$  definiert sind und die genannten Eigenschaften besitzen, verallgemeinert. Das Resultat entspricht vollkommen dem von Bochner. Die Funktionen aus  $\mathfrak{P}_A$  werden in passender Weise in  $(-\infty, \infty)$  fortgesetzt und dann wird der Bochnersche Satz angewandt. Bezüglich der Eindeutigkeit der Darstellung wird unter anderem noch folgendes gezeigt: Die Darstellung ist dann und nur dann nicht eindeutig, wenn für jede nicht konstante

Funktion  $\tau(x)$  von beschränkter Schwankung  $\int_0^A \int_0^A f(x-y) d\tau(x) d\tau(y) > 0$  ist und

die mit den Eigenfunktionen und Eigenwerten  $\varphi_n(x)$  bzw.  $\lambda_n$  des Kerns  $f(x-y)$  gebildete Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| \int_0^A e^{ixt} \varphi_n(x) dx \right|$  in  $(-\infty, \infty)$  konvergiert. Tautz.

Schaeffer, A. C.: **The Fourier-Stieltjes coefficients of a function of bounded variation.** Amer. J. Math. **61**, 934—940 (1939).

Bekanntlich ist  $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} c_n(F) = 0$ , wenn  $F(x)$  eine absolut stetige Funktion und  $c_n(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx} dF(x)$  ist. Dies trifft nicht notwendigerweise zu, wenn  $F(x)$  nicht absolut stetig ist. Wiener und Wintner (dies. Zbl. **19**, 169) haben, ein früheres Ergebnis J. E. Littlewoods (dies. Zbl. **15**, 64) verbessernd, bewiesen, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  eine monotone (nicht absolut stetige) Funktion  $F(x)$  existiert, so daß  $c_n(F) = O(|n|^{-1/2+\varepsilon})$ ,  $n \rightarrow \pm \infty$ , ist. Verf. beweist, daß für jede Folge  $r(n)$  mit  $r(n) > 0$ ,  $r(n) < r(n+1)$ ,  $r(n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , eine monotone (nicht absolut stetige) Funktion  $F(x)$  existiert, so daß  $c_n(F) = O(r(n)|n|^{-1/2})$ ,  $n \rightarrow \pm \infty$ , gilt. L. Cesari (Pisa).

Erdős, Paul: **On a family of symmetric Bernoulli convolutions.** Amer. J. Math. **61**, 974—976 (1939).

Sei die reelle Funktion  $\beta(x) = 0, 1/2, 1$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), je nachdem  $x < -1$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $x > 1$  ist und  $0 < a < 1$  eine reelle Zahl. Es sei  $\lambda(x, a)$  die unendliche Bernoullifaltung

$$\lambda(x, a) = \beta(x/a) * \beta(x/a^2) * \dots; \quad (-\infty < x < +\infty)$$

wenn  $L(a, t)$  ihre Fourier-Stieltjestransformation ist, gilt

$$L(a, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\lambda(x, a) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(a^n t). \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Bekanntlich ist  $\lambda(x, a)$  rein singulär, wenn  $0 < a < 1/2$  ist (d. h. fast überall gilt  $d\lambda/dx = 0$ ), und also ist  $\lambda(x, a)$  nicht absolut stetig (R. Kerschner, dies. Zbl. **13**, 300). Wenn jedoch  $a = 1/2$ ,  $(1/2)^{1/2}$ ,  $(1/2)^{1/3}$ , ... ( $1/2 \leq a \leq 1$ ) ist, ist  $\lambda(x, a)$  absolut stetig (A. Wintner, dies. Zbl. **13**, 257). — Verf. beweist, daß unendlich viele Werte  $a$  ( $1/2 < a < 1$ )

existieren, für die  $\lambda(x, a)$  rein singulär ist. Besonders trifft das für alle Zahlen  $a = \frac{1}{\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ ,  $|\alpha_j| < 1$  zu, wo  $\alpha$  eine reelle, algebraische, ganze Zahl  $n$ -ten Grades ist ( $\alpha_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ , die  $\alpha$  assoziierten Zahlen). Außerdem wird noch das Verhalten von  $L(a, t)$  für  $t \rightarrow \infty$  betrachtet. L. Cesari (Pisa).

Erdős, Paul: **On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions.** Amer. J. Math. **62**, 180—186 (1940).

Se  $\beta(x)$  è una funzione che vale 0 per  $x \leq -1$ ,  $\frac{1}{2}$  per  $-1 < x \leq 1$ , 1 per  $x > 1$ , si ha, per la sua trasformata di Fourier-Stieltjes,

$$L(u, \beta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d\beta = \cos u$$

e quindi  $L(u, \beta(bx)) = \cos \frac{u}{b}$ . L'autore considera l'infinita convoluzione

$$\sigma_a(x) = \beta(ax) * \beta(a^2x) * \dots,$$

la quale converge per  $a > 1$  ed ha per trasformata di Fourier-Stieltjes

$$L(u, \sigma_a) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{u}{a^n}\right),$$

e dimostra il teorema: „Per ogni intero positivo  $m$ , esiste un  $\delta = \delta(m)$  tale che l'insieme dei punti dell'intervallo  $1 < a < 1 + \delta(m)$  per cui non vale la relazione

$$L(u, \sigma_a) = o(|u|^{-m}), \quad u \rightarrow \infty$$

è di misura nulla. Tale teorema basta per provare che, per lo stesso  $m$ , si può determinare  $\eta(m) > 0$  tale che l'insieme dei punti dell'intervallo  $1 < a < 1 + \eta(m)$  per cui  $\sigma_a(x)$  non possiede derivata continua di ordine  $m - 1$  è di misura nulla. L. Amerio.



**Wiener, Norbert, and Aurel Wintner: On singular distributions.** J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **17**, 233—246 (1939).

Ce travail contient différentes parties. Dans la première les aut. démontrent pour la fonction  $L_a(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(a^n u)$ ,  $0 < a < \frac{1}{2}$  l'inégalité  $\frac{1}{2u} \int_{-u}^u (L_a(v))^2 dv = O\left(\left|u\right|^{\frac{\log 2}{\log a}}\right)$ ,

$u \rightarrow 0$ . En choisissant  $a$  suffisamment près à 1 on démontre l'existence d'une fonction continue de distribution qui est presque constante et dont la transformée de Fourier-Stieltjes est  $O(|u|^{\varepsilon-1})$ ,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit. Pour la fonction

$\varphi_n(x) = -x + \int_0^x \prod_{p=1}^n (1 + \cos q_p y) dy$ ,  $q_n > 0$ , où  $q_{n+1}/q_n > \lambda > 2$ , ils démontrent

qu'elle tend uniformément pour  $n \rightarrow \infty$  vers une fonction de  $x$  continue de variation bornée, mais qui n'est pas absolument continue. La constante  $\lambda > 2$  ne peut être remplacée par 2. Ils démontrent un parallélisme entre leurs résultats et le Gegenbeispiel de Bohr (Acta math. **45**, 112—117). Dans la dernière partie ils complètent quelques lacunes dans la théorie générale de Wiener [Acta math. **55**, 117—258 (1930)] pour les fonctions spectrales.

N. Obrechhoff (Sofia).

**Khintchin, A.: Über unimodale Verteilungen.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk **2**, 1—6 u. deutsch. Zusammenfassung 7 (1938) [Russisch].

Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  heißt unimodal, wenn mindestens ein  $x$ -Wert  $\alpha$  existiert von der Beschaffenheit, daß  $F'(x)$  bei  $x < \alpha$  nicht abnehmend und bei  $x > \alpha$  nicht zunehmend ist; unbeschadet der Allgemeinheit nehmen wir an, daß  $\alpha = 0$ ; die Ableitung  $F'(x)$  wird nur da, wo sie existiert, betrachtet. Ist  $f(t)$  die Fouriertransformierte einer unimodalen Verteilung, so ist

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du, \quad (1)$$

wo  $\varphi(t)$  wiederum die Fouriertransformierte eines Verteilungsgesetzes ist; umgekehrt, wenn  $\varphi(u)$  eine beliebige Fouriertransformierte ist, so liefert (1) stets die Fouriertransformierte einer unimodalen Verteilung.

B. Hostinský (Brünn).

**Raikov, D.: A theorem from the theory of the analytic characteristic functions.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk **2**, 8—10 u. engl. Zusammenfassung 11 (1938) [Russisch].

L'auteur donne la démonstration du théorème suivant: Si la fonction caractéristique  $f(t)$  d'une loi de distribution indéfiniment divisible (voir P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1937; ce Zbl. **16**, 170) est régulière dans le cercle  $|t| < R$ , elle est régulière en tout point de la bande  $-R < \text{partie imaginaire de } t < R$  et elle est, dans cette bande, représentée par la formule

$$f(t) = \exp \left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \right\}.$$

B. Hostinský (Brünn).

**Pitt, H. R.: On Wiener's general harmonic analysis.** Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 1—18 (1939).

The problem discussed in this paper is that of the harmonic representation of an arbitrary function. The function  $f(x)$ , defined in  $(-\infty, +\infty)$  is said to belong to the class  $B$  if  $f(x)$  is integrable in any finite interval and if

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^p / (|n| + 1)^p < \infty, \quad F_n = \int_n^{n+1} |f(x)| dx$$

for some  $p$  on the range  $1 \leq p \leq 2$ . The fundamental lemma is that if  $f(x)$  belongs

to  $B$ , then

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-e}^e \frac{f(x)}{ix} (e^{ixy} - e^{-x^2}) dx$$

converges in mean of order  $p$  over any finite interval to a function  $s(y)$ . Introducing the notations

$$S_y(x) = s(y) e^{-ixy} - s(-y) e^{ixy} + ix \int_{-y}^y e^{-ixt} s(t) dt,$$

$$\sigma_y(x) = \frac{1}{y} \int_0^y S_t(x) dt = \int_{-y}^y \left[ ix \left( 1 - \frac{|u|}{y} \right) + \frac{|u|}{uy} \right] e^{-iux} s(u) du,$$

$$S_y^\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} S_t(x) dt,$$

where the first is obtained formally from  $\int_{-y}^y e^{-itx} ds(t)$  by partial integration, the second is the Cesàro mean of  $S_y(x)$  for positive value of  $y$  and the third is a weaker average of  $S_y(x)$ , the author proves that

$$S_y(x) \equiv \text{l. i. m.}_{e \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-e}^e f(u) \frac{\sin y(x-u)}{x-u} du,$$

the limit in mean being of order  $p'$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) and being taken over any finite range of values of  $y$ . Also

$$\sigma_y(x) = \frac{1}{2\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \{\sin \frac{1}{2} y u / \frac{1}{2} u\}^2 du, \quad S_y^\delta(x) = \frac{1}{\pi \delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{\sin y u \sin \delta u}{u^2} du.$$

From these results he derives the following theorem: 1°. Suppose that  $\delta > 0$ , that  $f(x)$  belongs to  $B$  and that the Fourier series of a periodic function which coincides with  $f(x)$  in an open interval containing  $x$  converges at  $x$  to the value  $f(x)$ . Then  $\lim_{y \rightarrow \infty} S_y^\delta(x) = f(x)$ . 2°. If  $f(x)$  belongs to  $B$ , then  $\lim_{y \rightarrow \infty} \sigma_y(x) = f(x)$  for almost all values of  $x$ . Further, relations between the above integrals and the classical harmonic developments — Fourier-Stieltjes transforms, Fourier transforms and almost periodic functions — are given. Finally there are proved the theorems concerning mean convergence and an analogue of the Hausdorff-Young's theorem. *Shin-ichi Izumi* (Sendai).

### **Funktionalanalysis, Funktionalräume:**

**Plessner, A.:** Über die Einordnung des Heavisideschen Operationskalküls in die Spektraltheorie maximaler Operatoren. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 10—12 (1940).

$D$  sei der Operator  $i \frac{d}{dt}$  im unitären Raum  $H^{(e)}$  aller  $\varphi(t)$  mit  $\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 e^{-2et} dt < \infty$ , in dem das skalare Produkt durch  $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^\infty e^{-2e\xi} \varphi_1(\xi) \overline{\varphi_2(\xi)} d\xi$  erklärt ist. Der

Operator  $D_e = D - \rho i E$  ist in  $H^{(e)}$  hermitesch und maximal. Aus der früher (vgl. dies. Zbl. 20, 369) entwickelten Theorie der maximalen Operatoren ergibt sich, daß jedes  $\varphi(t)$  aus  $H^{(e)}$  die Gestalt  $F(D_e) 1$  hat, wo  $1$  die Heavisidesche Einheitsfunktion und  $F(\sigma)$  die Grenzfunktion einer in der oberen Halbebene analytischen Funktion

$F(\lambda)$ ,  $\lambda = \sigma + i\tau$ ,  $\tau > 0$ , mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(\lambda)|^2}{|\lambda + \rho i|^2} d\sigma < k$  ist. Der Raum  $H^{(e)}$  der  $F(\sigma)$

ist isometrisch auf  $H^{(e)}$  abbildbar. Setzt man  $F(\lambda) = f(\lambda + \rho i)$ , so wird die Abbildung durch  $F(\sigma) = f(\sigma + \rho i) = f(s) = -is \int_0^\infty e^{ist} \varphi(t) dt$  vermittelt. Dies ist im wesentlichen die Zuordnung Funktion  $\rightarrow$  Operator im Heavisidekalkül. Die Anwendung des



Operators  $G(D)$  auf  $\varphi(t)$  wird durch  $G(D)\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) dE_e(\Delta_s) \varphi$  erklärt, wobei  $E_e(\Delta_s)$  die Spektralschar des maximalen Operators  $D_e$  ist. Bemerkungen über den zugehörigen Bereich der  $G(s)$ . Ohne Beweise. *G. Köthe (Münster i. W.).*

**Plessner, A.: Über halbunitäre Operatoren.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 710—712 (1939).

Im Anschluß an zwei frühere Noten (dies. Zbl. 20, 369; 21, 234) werden zuerst alle halbunitären Operatoren  $U$  (d. h.  $U^*U = E$ ) angegeben, die sich in der Form  $F(A)$ ,  $A$  ein gegebener maximaler Operator, schreiben lassen. — Die halbunitären Operatoren  $U_t$  ( $t \geq 0$ ) bilden eine stetige eingliedrige Halbgruppe, wenn für  $s, t \geq 0$  stets  $U_{s+t} = U_s U_t$  ist und  $(U_t h, g)$  stetig in  $t$  ist ( $h, g$  im Hilbertschen Raum). Zu jedem maximalen Operator  $A$  gehört die stetige eingliedrige Halbgruppe  $e^{itA}$ , umgekehrt existiert zu jeder stetigen Halbgruppe  $U_t$  ein maximaler Operator  $A$ , so daß  $U_t = e^{itA}$  ist. Schließlich wird auch noch zu der diskreten zyklischen Halbgruppe  $U^n$ ,  $n \geq 0$ , der Potenzen eines halbunitären Operators mit Hilfe einer additiven Funktion der Intervalle auf dem Einheitskreis eine Integraldarstellung der  $U^n$  gewonnen und umgekehrt zu einer solchen Funktion eine Gruppe  $U^n$  angegeben, die durch diese Funktion dargestellt wird. Meist ohne Beweise. *G. Köthe (Münster i. W.).*

**Gelfand, I.: To the theory of normed rings. II. On absolutely convergent trigonometrical series and integrals.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 570—572 (1939).

Applications of the author's general results on normed commutative rings (cf. this Zbl. 21, 294). The functions  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$  having an absolutely convergent Fourier series form a ring  $R$  which may be normed by putting  $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ . Let  $g(t)$  be such an element of  $R$  which has no inverse, that is, for which  $1/g(t)$  has not an absolutely convergent Fourier series ( $g(t) \neq 0$ ). A well known theorem of Wiener asserts that  $g(t)$  must vanish at a point. The author proves this in the following very interesting way. The products  $g(t)f(t)$  [where  $f(t)$  runs over  $R$ ] form a non-trivial ideal of  $R$ . By the author's previous results, not cited explicitly in the present paper (the reviewer being so not in the position to guarantee the exactness of the following formulation), there is some maximal ideal  $M$  containing this ideal and there exists a non-trivial ring-homomorphism  $a(f)$  of  $R$  into a sub-ring of the ring of the complex numbers  $a$  such that  $|a(f)| \leq \|f\|$  and that  $a(f) = 0$  for  $f \in M$ .  $a(e^{it})$  has then necessarily the absolute value 1,  $a(e^{it}) = e^{i\varphi}$ . It follows then  $a(f) = f(\varphi)$  first for trigonometric polynomials  $f(t)$ , then, by the continuity of the homomorphism, for all  $f(t)$  of  $R$ . In particular,  $a(g) = g(\varphi)$ . But  $a(g) = 0$ , for  $g(t) \in M$ . Thus  $g(t)$  vanishes at  $t = \varphi$ . — Further applications of the same method are given, one of the theorems obtained generalises a result of Wiener and Pitt (see this Zbl. 19, 168).

*Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Gelfand, I.: To the theory of normed rings. III. On the ring of almost periodic functions.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 573—574 (1939).

Der Ring  $R$  der im Sinne von H. Bohr fastperiodischen Funktionen  $x(t)$  ist ein normierter Ring im Sinne einer früheren Note (dies. Zbl. 21, 294), wenn

$$\|x(t)\| = \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t)|$$

gesetzt wird. Unter Benützung der dort bewiesenen Sätze wird gezeigt, daß  $R$  isomorph ist dem Ring aller stetigen Funktionen, die auf der Gruppe  $G$  der Charaktere der Additionsgruppe der reellen Zahlen erklärt sind. Die Stetigkeit in  $G$  ist wie üblich erklärt durch die Umgebungen  $|\varphi(\lambda_i) - \varphi_0(\lambda_i)| < \varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\varphi_0(\lambda)$  ein gegebener (multiplikativ geschriebener) Charakter,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  irgendwelche festen reellen Zahlen.

*G. Köthe (Münster i. W.).*

**Šmulian, V.:** On multiplicative linear functionals in certain special normed rings. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 13—16 (1940).

Es wird zuerst mit Hilfe der Wohlordnung eine Konstruktionsmethode für sämtliche additiven Mengenfunktionen  $\Phi(e)$  angegeben, die für die Teilmengen  $e$  einer beliebigen Menge  $Q$  erklärt sind und nur die Werte 0 und 1 annehmen.  $[Q]$  sei der Ring aller reellen beschränkten Funktionen  $x(q)$  auf  $Q$ . Mit der Metrik  $\|x\| = \sup_{q \in Q} |x(q)|$

wird  $[Q]$  ein normierter Ring im Sinne von J. Gelfand und A. Kolmogoroff (vgl. dies. Zbl. **21**, 411). Es wird gezeigt, daß die multiplikativen linearen Funktionale  $f(x)$  in  $[Q]$  mit  $(1) \int_Q x(q) d\Phi(e)$  identisch sind. Ist  $Q$  ein bikompakter Raum, so läßt

sich diese Form noch weiter vereinfachen. Ist  $Q$  ein normaler topologischer Raum, und wird von den  $x(q)$  auch noch Stetigkeit verlangt, so erhält man für die multiplikativen linearen Funktionale wieder die Gestalt (1),  $e$  durchläuft aber nur den kleinsten, alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von  $Q$  enthaltenden Mengenkörper.  
G. Köthe (Münster i. W.).

**Gelfand, I.:** On one-parametrical groups of operators in a normed space. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **25**, 713—718 (1939).

Der Operator  $U_t$  ( $t$  ein reeller Parameter) des linearen Raumes  $E$  genüge folgenden Bedingungen: (1)  $U_t$  ist schwach stetig in  $t$ , (2)  $U_{t+s} = U_t \cdot U_s$ ,  $U_0 = 1$ , (3)  $|U_t| \leq 1$ . Auf eine von A. N. Kolmogoroff herrührende Fragestellung eingehend, beweist Verf. die Darstellung  $U_t = e^{tA}$ . (Für unitäre Operatoren im Hilbertschen Raum von M. Stone nachgewiesen.) Es wird  $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U_h - 1}{h}$  gesetzt und die Existenz dieser

infinitesimalen Operation für eine in  $E$  überall dichte Menge sichergestellt. Der Existenzbeweis gelingt auf Grund der Darstellbarkeit der Elemente einer solchen

Menge als Bildelemente des Operators  $C = \int_{-\infty}^{\infty} U_s d\varphi(s)$ . (Wegen der Existenz von  $C$

in separablen Räumen vgl. auch I. Gelfand, dies. Zbl. **20**, 367.) Verf. entwickelt dann einige Eigenschaften des Operators  $A$ . Er zeigt u. a., daß  $A$  abgeschlossen ist, daß das Spektrum auf der imaginären Achse liegt und daß die Reihenentwicklung

$U_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n$  dort gilt, wo  $A$  Sinn hat. Diese Entwicklung wird symbolisch durch

die oben angeschriebene Exponentialformel dargestellt. Hadwiger (Bern).

**Gross, George Lloyd:** Use of functionals in obtaining approximate solutions of linear operational equations. Iowa State Coll. J. Sci. **14**, 37—38 (1939) a. Ames: Diss. 1939.

**Yosida, Kôzaku:** Quasi-completely-continuous linear functional operations. Jap. J. Math. **15**, 297—301 (1939).

Es sei  $K$  ein linearer Operator in einem komplexen Banachschen Raum  $\mathfrak{B}$  mit der Eigenschaft: (a) Es gibt eine natürliche Zahl  $m$  und einen vollstetigen linearen Operator  $V$  in  $\mathfrak{B}$ , so daß  $\|K^m - V\| < 1$ . Verf. zeigt dann: Die Resolvente  $R_\lambda$  der abstrakten Fredholmschen Gleichung  $x - \lambda Kx = y$  ist eine meromorphe Funktion von  $\lambda$  in  $1 - \varepsilon < |\lambda| < 1 + \varepsilon$ , die Pole  $\lambda = \lambda_i$  von  $R_\lambda$  sind Eigenwerte von  $K$  mit endlichen Vielfachheiten, und der Hauptteil von  $R_\lambda$  an jedem Pol ist vollstetig. Es besteht auch die Fredholmsche Alternative zwischen der Gleichung  $x - Kx = y$  und ihrer adjungierten  $f - \bar{K}f = g$  in  $|\mathfrak{B}|$ . Wenn auch die Bedingung: (b) „ $\|K^n\| \leq$  eine Konstante für alle  $n$ “ besteht, so läßt sich  $K$  folgendermaßen zerlegen:  $K = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{-1} T_i + S$ ,  $T_i^2 = T_i$ ,  $T_i T_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $T_i S = S T_i = 0$ ,  $\|S^n\| < \frac{\beta}{(1 + \varepsilon)^n}$  für alle  $n$ , wo  $\lambda_i$  Eigenwerte von  $K$  mit  $|\lambda_i| = 1$ ,  $T_i$  vollstetige und  $S$  stetige lineare Operatoren sind. Dies



ist eine Erweiterung einer früheren Arbeit von demselben Verf. (Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 286; dies. Zbl. 19, 412).

M. Nagumo (Osaka).

**Plancherel, M.:** Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels  $L^\alpha$ . Comment. math. helv. 12, 225—232 (1940).

Démonstration des énoncés suivants. — Soit  $F' = T'f'$  une transformation linéaire bornée de l'espace  $L_p^\alpha$  des fonctions  $f'(x) = f'(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $|f'(x)|^\alpha$  sommables dans l'espace  $L_q^\beta$  des fonctions  $F'(y) = F'(y_1, y_2, \dots, y_q)$  de  $|F'(y)|^\beta$  sommables. Soit  $F'' = T''f''$  une transformation linéaire bornée de l'espace  $L_{m-p}^\alpha$  des fonctions  $f''(x'') = f''(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_m)$  de  $|f''(x'')|^\alpha$  sommables dans l'espace  $L_{m-q}^\beta$  des fonctions  $F''(y'') = F''(y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_m)$  de  $|F''(y'')|^\beta$  sommables. Lorsque  $0 < \alpha \leq \beta$ , alors il existe une et une seule transformation linéaire bornée  $T$  de l'espace  $L_m^\alpha = L_p^\alpha + L_{m-p}^\alpha$  dans l'espace  $L_m^\beta = L_q^\beta + L_{m-q}^\beta$  telle que l'on ait  $T(f'f'') = T'f'$ .  $T''f''$  pour tout  $f'$  de  $L_p^\alpha$  et pour tout  $f''$  de  $L_{m-p}^\alpha$ . La borne de  $T$  est le produit des bornes de  $T'$  et de  $T''$ . On a alors pour toute fonction  $f(x) = f(x', x'')$  de  $L_m^\alpha$

$$T(f(x)) = T''(T'(f(x', x''))) = T'(T''(f(x', x''))).$$

Soit  $T_2(f(x))$  une transformation linéaire bornée de  $L_m^2$  dans  $L_m^2$ , engendrée par un noyau  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$  borné,  $|\varphi(x; y)| \leq M$ , cela veut dire que

$$F(y) = T_2(f(x)) = (\lim_{r_1 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow \infty, \dots, r_m \rightarrow \infty} \text{en moyenne d'ordre } 2) \int_{-r_1}^{r_1} \int_{-r_2}^{r_2} \dots \int_{-r_m}^{r_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Soit  $b_2$  la borne de  $T_2$ . Pour  $f \in L_m^\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq 2$ ), l'intégrale figurant dans cette expression converge en moyenne d'ordre  $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$  vers une fonction  $F \in L_n^{\alpha'}$ . La trans-

formation  $F = T_\alpha f$  ainsi définie de  $L_m^\alpha$  dans  $L_n^{\alpha'}$  a la borne  $b_\alpha = b_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \cdot M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$ . Lorsque  $f$  appartient simultanément à  $L_m^\alpha$  et à  $L_m^2$ , alors  $T_\alpha f = T_2 f$ . Béla de Sz. Nagy.

**Grosberg, J., et M. Krein:** Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 723—726 (1939).

Soit  $K$  un ensemble conique d'un espace linéaire normé  $E$  (cela veut dire que  $K$  comprend aussi les sommes et les multiples positifs de ses éléments et que  $x$  et  $-x$  ne peuvent être compris simultanément en  $K$  que pour  $x = 0$ ). L'espace  $E$  et son espace conjugué  $E^*$  peuvent être semi-ordonnés par  $K$ :  $x \leq y$  ( $x, y \in E$ ) lorsque  $y - x \in K$ ,  $g \leq f$  ( $g, f \in E^*$ ) lorsque  $g(x) \leq f(x)$  pour  $x \in K$ . —  $C$  étant une constante  $\geq 1$ , on convient de dire que  $K$  satisfait à la condition  $C$  si les hypothèses  $y < x < z$ ,  $\|y\| \leq 1$  et  $\|z\| \leq 1$  entraînent que  $\|x\| \leq C$ . — La première proposition démontrée par les auteurs est la suivante. Pour que tout  $f$  de  $E^*$  admette une décomposition  $f = g - h$  ( $g, h \in E^*$ ) telle que  $g \geq 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $\|g\| + \|h\| \leq C \cdot \|f\|$ , il est nécessaire et suffisant que  $K$  satisfasse à la condition  $C$ . — Un exemple d'un tel espace est fourni par l'espace  $E'$  des fonctions continues  $x(t)$  sur  $0 \leq t \leq 1$ , si l'on pose  $\|x(t)\| = \max |x(t)|$  et si  $K'$  consiste des fonctions non-négatives. — Les auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace linéaire normé abstrait  $E$  semi-ordonné par un ensemble conique fermé  $K'$  puisse être représenté par l'espace  $E'$  d'une manière biunivoque, linéaire, continue et préservant la relation  $\leq$ . C'est ce que  $E$  soit séparable et que pour un  $C \geq 1$  l'ensemble  $K$  satisfasse à la condition  $C$ .

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Kolmogoroff, A.:** Kurven im Hilbertschen Raum, die gegenüber einer einparametrischen Gruppe von Bewegungen invariant sind. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 6—9 (1940).

Unter einer Bewegung im Hilbertschen Raum  $H$  wird eine Transformation  $K$  von  $H$  in sich verstanden, die in der Form  $Kx = a + Ux$  darstellbar ist, wo  $a$  ein festes Element von  $H$  und  $U$  eine unitäre Transformation von  $H$  in sich bedeuten.

Eine Schar von Bewegungen  $K_t$  ( $-\infty < t < \infty$ ) wird eine stetige einparametrische Gruppe (s. e. G.) genannt, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:  $K_{t+s} = K_t K_s$ ,  $K_t x \rightarrow K_s x$  für  $t \rightarrow s$ . Die Untersuchung gilt der Klasse  $\mathfrak{K}$  der in  $H$  gelegenen Kurven  $\xi(t)$ , die in der Form  $\xi(t) = K_t x_0$  darstellbar sind, wo  $x_0$  ein festes Element von  $H$  und  $K_t$  eine s. e. G. von Bewegungen sind. Die Kurven  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  heißen kongruent, wenn es eine Bewegung  $K$  von  $H$  gibt, so daß  $\xi_1(t) = K \xi_2(t)$  ist. — Es wird ein vollständiges System gegenüber Kongruenz invarianter Eigenschaften der Kurven der Klasse  $\mathfrak{K}$  aufgestellt. Ferner wird auch eine Integraldarstellung für die Kurven aus  $\mathfrak{K}$  angegeben. — Die Beweise sind nur kurz angedeutet. *Béla v. Sz. Nagy.*

**Kolmogoroff, A. N.: Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 115—118 (1940).

Eine Kurve  $\xi(t)$  der Klasse  $\mathfrak{K}$  (siehe das vorstehende Ref.) gehört der Klasse  $\mathfrak{A}$  an, wenn für ein beliebiges reelles  $k \neq 0$  eine solche Ähnlichkeitstransformation  $A_k$  existiert, daß  $\xi(kt) = A_k \xi(t)$  für alle  $t$  gilt. Dabei wird unter einer Ähnlichkeitstransformation des Raumes  $H$  eine solche Transformation verstanden, die in der Form  $qK$  darstellbar ist, wo  $q$  eine positive Zahl und  $K$  eine Bewegung des Raumes  $H$  bedeuten. Die zugehörigen Invarianten werden diskutiert. Im endlichdimensionalen unitären Raum besteht  $\mathfrak{A}$  nur aus den Geraden, im Hilbertschen Raume  $H$  gibt es außer den Geraden noch andere Kurven, die zu  $\mathfrak{A}$  gehören. Eine interessante Klasse (Klasse  $\mathfrak{B}$ ) derartiger Kurven sind die „Wiener'schen Spiralen“, charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften: 1. sie gehören der Klasse  $\mathfrak{K}$  an, 2. ihre Sehnen, die zu punktfremden Bögen gehören, sind immer aufeinander orthogonal. Es wird eine Realisation der Wiener'schen Spirale im Funktionenraum  $L^2$  angegeben. — Alle diese Begriffsbildungen und Resultate gestatten interessante Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Ohne Beweise. *Béla v. Sz. Nagy (Szeged).*

**Valich, B.: Sur la métrisation de convergences dans les espaces linéaires.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 433—437 (1939).

If in a linear space there is postulated a notion  $x_n \rightarrow x$  and a numerical function  $\rho[K] \geq 0$  defined for all finite complexes  $K = (x_1, \dots, x_n)$  and if these notions are subject to certain natural restrictions, the author gives conditions which are necessary and sufficient to insure the equivalence of  $x_n \rightarrow x$  and  $\rho[(x_n - x, \dots, x_m - x)] \rightarrow 0$ .

*N. Dunford (New Haven).*

**Michal, A. D.: General differential geometries and related topics.** Bull. Amer. Math. Soc. 45, 529—563 (1939).

An address summarizing the recent investigations of Michal and his pupils, with some new contributions to the theory of differentials in a linear topological space.

*N. Dunford (New Haven).*

**Nakano, Hidegorô: Eine Bedingung für die topologische Isomorphie von einem Banachschen Raum mit dem Hilbertschen.** Jap. J. Math. 15, 287—296 (1939).

The author proves the theorem: A Banach space  $B$  is topologically isomorphic to a (separable) Hilbert space if and only if  $B$  is infinite dimensional and separable and if the variation of the finite dimensional subspaces of  $B$  is uniformly bounded. — Variation of the  $n$ -dimensional subspace  $B_n$  of  $B$  is defined as follows: Let  $f_1, \dots, f_n$  be a linearly independent system of  $B_n$  and  $M(f_1, \dots, f_n)$  (or  $m(f_1, \dots, f_n)$ ) be the least upper bound (or greatest lower bound) of  $\|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\| / \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , taken for all systems  $(x_1, \dots, x_n)$  of complex numbers. Then  $0 < m(f_1, \dots, f_n) \leq M(f_1, \dots, f_n) < \infty$ . The variation of  $B_n$  is defined by the greatest lower bound of  $M(f_1, \dots, f_n) / m(f_1, \dots, f_n)$ , taken for all linearly independent systems  $(f_1, \dots, f_n)$  in  $B_n$ .

*Shin-ichi Izumi (Sendai).*

**Fantappiè, Luigi: Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico  $T_0$ .** Univ. Roma Rend. Mat., V. s. 1, 84—90 (1940).

O. Catunda (vgl. dies. Zbl. 21, 136) hat im Raum der analytischen Funktionen von  $n$  Veränderlichen einen Umgebungsbegriff betrachtet. Es werden dazu einige



Ergänzungen bewiesen, so daß der so entstehende topologische Raum zwar ein  $T_0$ -, aber kein  $T_1$ - oder  $T_2$ -Raum ist und daß das Trennungsaxiom nur in seiner schwächsten, nach Kolmogoroff benannten Fassung richtig ist. *G. Köthe* (Münster i. W.).

**Lorch, Edgar R.:** Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **45**, 945—947 (1939).

The mean ergodic theorem in reflexive (= regular) Banach space is proved. Since reflexive space is locally weakly compact, the result is a special case of the general theorem due to F. Riesz, S. Kakutani and the reviewer. According to the footnote, the result was obtained in the spring of 1938. *Kôzaku Yosida* (Osaka).

**Birkhoff, Garrett:** An ergodic theorem for general semi-groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **25**, 625—627 (1939).

Let  $G$  be any (commutative or non-commutative) semi-group of linear transformations of a topological linear space  $E$  and let  $x$  denote any element of  $E$ . The means of the transforms  $xT_a$  ( $T_a \in G$ ) of  $x$  may be semi-ordered as follows: let us call „successors“ of the mean  $\sum c_a x T_a$  ( $c_a > 0$ ,  $\sum c_a = 1$ ) the means of its transforms, that is the means  $\sum'_b c'_b \left( \sum_a c_a x T_a \right) T_b = \sum_{a,b} c'_b c_a x T_a T_b$ . The set  $\{x_\alpha\}$  of the

means of  $x$  is said to be convergent to the limit  $a$  if given any neighborhood  $U(a)$  of  $a$ , every  $x_\alpha$  has a successor  $x_\beta$ , all of whose successors lie in  $U(a)$ . — The following theorem is proved: If  $E$  is a finite or infinite-dimensional Euclidean space of Hilbert space type and if the linear transformations  $T_a$  do not increase norm (i. e., their bounds do not exceed 1), then the means of the transforms of any element  $x$  of  $E$  converge in the above sense to a fix-point  $x^*$  (i. e.,  $x^* T_a = x^*$  for all  $T_a \in G$ ). *Béla de Sz. Nagy*.

**Alaoglu, L., and G. Birkhoff:** General ergodic theorems. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **25**, 628—630 (1939).

Let  $G$  be a (not necessarily commutative) semi-group of uniformly bounded linear transformations of a Banach space  $E$ . An element  $x$  of  $E$  is called „ergodic“ if the means  $\sum c_a \cdot x T_a$  ( $c_a > 0$ ,  $\sum c_a = 1$ ) of the transforms  $x T_a$  ( $T_a \in G$ ) of  $x$  converge to a fix-point in the sense introduced in the paper of G. Birkhoff reviewed above. — In order that all the elements of  $E$  be ergodic, it is necessary and sufficient that the closed convex envelop of the transforms of every element contains one and only one fix-point. This condition is satisfied e. g. in the case when  $E$  is „uniformly convex“,  $G$  is commutative and the bounds of the transformations  $T_a$  in  $G$  do not exceed 1. — The purely algebraic definition of the „convergence“ for the means of the transforms of an element mentioned above is equivalent in the cases treated in the literature to the more familiar notion of convergence with respect of a sequence of measures. The following theorem is namely true: Let  $m_n(V)$  be a sequence of measures on  $G$  such that  $m_n(G) = 1$  and  $m_n(T_a V) - m_n(V) \rightarrow 0$ ,  $m_n(V T_a) - m_n(V) \rightarrow 0$  for fixed  $T$  and any  $V$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Then an element  $x$  is „ergodic“ with the limit fix-point  $x^*$  if and only if  $\int_G x T_a dV_n \rightarrow x^*$ , as  $n \rightarrow \infty$ . — The case when  $G$  admits an invariant

measure (or, more generally, an invariant mean), is particularly investigated. — Details of the demonstrations are to be given in a forthcoming paper. *Béla de Sz. Nagy*.

### **Funktionentheorie:**

**Walsh, J. L.:** Note on the curvature of orthogonal trajectories of level curves of Green's functions. III. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 101—108 (1940).

$R$  sei ein einfachzusammenhängendes Gebiet der  $w$ -Ebene mit dem Rand  $B$ ,  $G$  seine Greensche Funktion bezüglich des endlichen Poles  $O$ ; zeichnet man zu den orthogonalen Trajektorien der Niveaueurven von  $G$  in  $O$  die Krümmungskreise, so gehen sie durch einen weiteren festen Punkt  $D$ , den man als zu  $O$  bezüglich  $R$  konjugiert bezeichnet. Jeder Kreis durch  $O$  und  $D$  schneidet  $B$ , und zu jedem  $D$  außerhalb  $R$  gibt es einen passenden Punkt  $O$ . Vorliegende Arbeit untersucht weitere Eigenschaften von  $D$ . 1.  $B$  bestehe aus wenigstens zwei Punkten;  $C$  sei ein Kreis, der  $B$  im endlichen

Punkt  $\alpha$  trifft und begrenze ein in  $R$  liegendes Kreisgebiet  $R'$  (d. h. Inneres oder Äußeres eines Kreises oder Halbebene),  $T$  ein in  $R'$  gelegenes Dreieck mit der Ecke  $\alpha$ ; die Punktfolge  $w_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) aus  $T$  habe  $\alpha$  zum Häufungspunkt, dann häufen sich auch deren Konjugierte bezüglich  $R$  in  $\alpha$ . 2.  $B$  enthalte wenigstens zwei Punkte. Zu jedem Randpunkt  $w_0$  von  $R$  gibt es eine sich daselbst häufende Punktfolge  $w_\nu$  aus  $R$ , deren Konjugierte bezüglich  $R$  sich auch in  $w_0$  häufen. 3. Man kann ein beschränktes Jordangebiet  $R$  konstruieren mit einem Randpunkt  $w_0$  und einer daselbst sich häufenden Punktfolge  $w_\nu$  aus  $R$  derart, daß die Konjugierten von  $w_\nu$  bezüglich  $R$  gegen  $\infty$  streben. (Vgl. auch dies. Zbl. 19, 271.) Harald Geppert (Berlin).

**Courant, R.: Conformal mapping of multiply connected domains.** Duke math. J. 5, 814—823 (1939).

Über der  $w = u + iv$ -Ebene ist eine Riemannsche Fläche ausgebreitet, aufgebaut aus  $k$  Einheitskreisen mittels Windungspunkten der Gesamtordnung  $2k - 2$  und aus  $p \geq 0$  Vollebenen, die durch je zwei Windungspunkte mit den Flächen der Einheitskreise zusammenhängen. In der  $z = x + iy$ -Ebene sei ein  $k$ -fach zusammenhängendes Gebiet  $\mathfrak{G}$  gegeben, berandet von  $k$  streckbaren Jordankurven  $g_j$ . Es wird gezeigt, daß bei festem  $p \geq 0$  eine konforme Abbildung von  $\mathfrak{G}$  auf eine Fläche  $\mathfrak{B}$  aus der genannten Klasse möglich ist. Der Beweis wird auf ein Variationsproblem zurückgeführt. Mit den auf  $\mathfrak{B}$  einschließlich des Randes  $w_j$ , d. s. die  $k$  Kreise  $|w| = 1$ , stückweise stetig differenzierbaren Vektoren  $\mathfrak{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , die die Kurven  $w_j$  auf die Randkurven  $g_j$  von  $\mathfrak{G}$  umkehrbar eindeutig abbilden, wird das Integral  $R(\mathfrak{x}) = D(\mathfrak{x}) - a$  gebildet;  $D(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2) du dv$ ,  $a$  der endliche

Inhalt von  $\mathfrak{G}$ . Es ist ein zulässiger Vektor  $\mathfrak{x}$  und ein Gebiet  $\mathfrak{B}$  der angegebenen Klasse zu finden, so daß  $D(\mathfrak{x})$  und damit  $R(\mathfrak{x})$  zum Minimum wird. Unter der Annahme, daß eine Lösung existiert, werden die Variationsbedingungen in der Weise aufgestellt, daß bei festem  $\mathfrak{B}$  der Extremalvektor  $\mathfrak{x}$  variiert wird und zum anderen bei festem Vektor  $\mathfrak{x}$  das Gebiet  $\mathfrak{B}$ ; letztere Variation besteht aus Verschiebungen der Windungspunkte und Auflösung der Windungspunkte höherer Ordnung in solche der Ordnung 1. Diese Bedingungen lehren, daß der Lösungsvektor  $\mathfrak{x}$  neben  $\Delta \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = 0$  noch  $\varphi(w) = f'(w)^2 + g'(w)^2 = (\mathfrak{x}_u - i \mathfrak{x}_v)^2 = 0$  erfüllen muß; dabei ist  $x(u, v) = \Re f(w)$ ,  $y(u, v) = \Re g(w)$ ,  $f, g$  analytische Funktionen von  $w$ . Das bedeutet, daß die durch  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$  vermittelte Abbildung zwischen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{G}$  konform ist. Das Schlußstück des Beweises besteht in dem Nachweis, daß die bisher postulierte Lösung des Variationsproblems auch wirklich existiert. Ein Teil der im Beweis benützten Hilfsmittel ist in einer Arbeit des Verf. über das Plateausche Problem [Ann. of Math. 38, 679 ff. (1937); dies. Zbl. 17, 268] ausführlich behandelt. Wittich (Göttingen).

**Golusin, G. M.: Iterationsprozesse für konforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche.** Rec. math. Moscou, N. s. 6, 377—381 u. deutsch. Zusammenfassung 382 (1939) [Russisch].

Verf. entwickelt Iterationsverfahren zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf einige kanonische Bereichsklassen; sie bestehen aus aufeinanderfolgenden Abbildungen einfach zusammenhängender Bereiche. Die Konvergenz der Verfahren wird auf Grund von Extremumseigenschaften der schlichten Funktionen bewiesen. — Auszug. H. Geppert (Berlin).

**Lavrentieff, M.: Sur certaines propriétés des fonctions univalentes et leurs applications à la théorie des sillages.** Rec. Math. Moscou, N. s. 4, 391—454 u. franz. Zusammenfassung 454—458 (1938) [Russisch].

Ausführliche Darstellung der in verschiedenen kürzeren Noten (dies. Zbl. 19, 71; 20, 143) angegebenen Resultate. Es handelt sich um Sätze über das Randverhalten bei schlichter konformer Abbildung eines Gebietes in eine Halbebene bzw. in einen Parallelstreifen. Diese Sätze benützt Verf. beim Studium ebener Potentialströmungen. Wittich (Göttingen).



**Valeiras, Antonio:** Über eine auf Potenzreihen bezügliche geometrische Frage. An. Soc. Ci. Argent. 128, 217—221 (1939) [Spanisch].

Beim Studium des Verhaltens einer Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreis stößt man auf den Ausdruck

$$w = \frac{|1-z|}{1-|z|}, \quad z = x + iy.$$

Verf. untersucht im Zusammenhang damit die Kurven  $w = k = \text{konst.}$  Es sind Pascalsche Schnecken, die man durch stereographische Projektion der Schnittkurven elliptischer Zylinder mit der Einheitskugel von deren Nordpol aus erhält; die Zylinder stehen auf der  $x, y$ -Ebene senkrecht und schneiden auf ihr Ellipsen der Exzentrizität  $\frac{1}{k^2}$  aus, deren ein Brennpunkt in 0,0 liegt, während der davon entfernteste Scheitel in 1,0 fällt. *Harald Geppert* (Berlin).

**Biggeri, Carlos:** Ein Satz über die Singularitäten Dirichletscher Reihen. Bol. mat. 12, 255—256 (1939) [Spanisch].

Vgl. dies. Zbl. 16, 64. Verf. beweist nochmals den dort erwähnten Satz für Dirichletreihen. *Ullrich* (Gießen).

**Lambin, N.:** Sur une classe de points singuliers essentiels. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 467—469 (1939).

Es werden die Steiglinien [ $\arg f(z) = \text{konst.}$  so durchlaufen, daß  $|f(z)|$  wächst] von Funktionen  $f(z)$  betrachtet, die in der Umgebung  $U$  einer wesentlichen Singularität  $z_0$  regulär und nullstellenfrei sind und außerdem keine Kreuzungspunkte aufweisen [ $f'(z) \neq 0$ ]. Sie werden zur Einteilung von  $U$  in typische Teilgebiete herangezogen; und für verschiedene Funktionen obiger Art werden dann funktionale Beziehungen aus der Voraussetzung topologischer Äquivalenz solcher Einteilungen erschlossen. — Die knappe Darstellung einer vorläufigen Mitteilung zeigt irreführende Mängel: so wird z. B. von einem „point singulier essentiel“ gesprochen, in dessen Umgebung: „ $f(z)$  est univalente,  $\neq 0$ , et possède une dérivée qui n'est pas nulle“. In der Umgebung einer wesentlichen Singularität ist Schlichtheit unmöglich, neben ihr auch nicht nötig noch  $f' \neq 0$  vorauszusetzen; vermutlich ist uniforme gemeint, was aber wieder zu anderen Textstellen nicht paßt. Es wird wohl erst aus einer ausführlicheren Mitteilung zu sehen sein, was Verf. im Auge hatte. *Ullrich* (Gießen).

**Gontcharoff, W.:** Encore sur le théorème de M. Mandelbrojt. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 447—448 u. franz. Text 448—450 (1939) [Russisch].

Zu der in dies. Zbl. 19, 312 erschienenen Besprechung einer früheren eigenen Arbeit, die sich mit den Singularitäten einer für reelle  $x$  analytischen Funktion  $f(x)$  befaßt, nimmt Verf. Stellung. Seine Ergebnisse sind gültig, wenn  $f(x)$  für reelle  $x$  auch reell ist; sie bleiben auch gegenteiligenfalls gültig, wenn man nur die daselbst auftretende Gesamtheit  $E$  der Singularitäten durch  $E + \bar{E}$  ( $\bar{E}$  konjugiert zu  $E$ ) ersetzt.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Golusin, G. M.:** Zur Theorie der schlichten Funktionen. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 383—388 u. deutsch. Zusammenfassung 388 (1939) [Russisch].

Mittels einer Verallgemeinerung der Parameterdarstellung schlichter Funktionen nach Löwner [Math. Ann. 89 (1923)] beweist Verf. folgende Sätze: Bilden  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  mit  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ ,  $f_1'(0) > 0$ ,  $f_2'(0) > 0$  den Bereich  $|z| < 1$  regulär und schlicht auf  $B_1$  bzw.  $B_2$  ab und ist  $B_2$  ganz in  $B_1$  enthalten, ohne mit  $B_1$  zusammenzufallen, so gilt  $|f_2(z)| < |f_1(z)|$  für  $0 \leq |z| < r_0$ , worin  $r_0 = 0,39 \dots$  Wurzel der Gleichung

$$\log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arctan r = \frac{\pi}{2}$$

ist und nicht durch eine größere Konstante ersetzt werden kann; für  $|z| < \frac{1}{10}$  gilt überdies  $|f_2'(z)| < |f_1'(z)|$ . *Harald Geppert* (Berlin).

**Kryloff, W.:** Über Funktionen, die in der Halbebene regulär sind. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 95—137 u. deutsch. Zusammenfassung 138 (1939) [Russisch].

Verf. betrachtet Klassen analytischer Funktionen  $f(x + iy)$ , die in der Halbebene  $y > 0$  regulär sind und den Ungleichungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dx \leq M^p < +\infty \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |f(x + iy)| dx \leq M \leq +\infty$$

genügen. Dabei ist  $p > 0$  und  $M$  eine feste Konstante, die nicht von  $y$  abhängt. Es

werden Eigenschaften der Funktionen dieser Klassen festgestellt, die den Eigenschaften der Funktionen der Rieszschen und der Nevanlinnaschen Klasse analog sind und Parameterdarstellungen dieser Funktionen angeben. Vgl. dazu Hille und Tamarkin, dies. Zbl. 12, 255, und Kawata, dies. Zbl. 17, 53. — Nach dem Auszug besprochen.

H. L. Schmid (Gießen).

**Fedoroff, V. S.:** Sur les coefficients de Fourier. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 127—128 (1940).

Es sei  $D$  ein offener zusammenhängender Bereich der komplexen  $z = x + iy$ -Ebene und  $f(z)$  eine komplexwertige, stetige (im allgemeinen nicht analytische), in  $D$  definierte Funktion. Es sei  $C(z, r)$  der Kreis, der  $z$  zum Mittelpunkt und  $r$  zum Radius hat ( $\Gamma(z, r)$  sein Umfang), und es seien  $a_n(z, r)$ ,  $b_n(z, r)$  die Euler-Fourierschen Koeffizienten der Funktion  $F(\theta) = f(z + re^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . An Hand der Größen

$$L_n = L_n(z, r) = \pi i r^n (a_n(z, r) + i b_n(z, r)) = \int_{\Gamma(z, r)} f(t) (t - z)^{n-1} dt,$$

$$I_n = I_n(z, \rho) = -i \int_0^\rho L_n(z, r) r dr = \int_{C(z, r)} f(t) (t - z)^n d\sigma$$

charakterisiert Verf. einige Funktionsklassen: Holomorphe Funktionen, Polynome, Sonderklassen der Polynome usw. und unter anderen die des Typs  $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(z) x^k$  ( $h_k(z)$  holomorphe Funktionen). Beweise fehlen.

L. Cesari (Pisa).

**Keldyeh, M.:** Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 391—400 (1939).

Es sei:  $P_n(z)$  ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades;  $\mathfrak{G}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit dem Rand  $\Gamma$ ;  $f(z)$  regulär analytisch in  $\mathfrak{G}$ . Die erste Hälfte der Arbeit betrifft jene  $P_n(z) = \Pi_n(z) = z + \dots$ , die das Integral  $\iint_{\mathfrak{G}} |P'_n(z)|^2 dx dy$  zum Minimum machen; die Folge  $\Pi_n(z)$  strebt bekanntlich innerhalb  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig gegen die zu  $g(z) = z + \dots$  normierte Kreisabbildungsfunktion von  $\mathfrak{G}$  (das  $\mathfrak{G}$  enthalte). Verf. zeigt, daß das sogar auf dem  $\mathfrak{G}$  zugeordneten abgeschlossenen Bereich  $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} + \Gamma$  gilt, wenn  $\Gamma$  eine einfache Kurve von beschränkter Krümmung ist, und daß dann für jedes  $\varepsilon > 0$  auf  $\bar{\mathfrak{G}}$  gilt:

$$|g(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon, \mathfrak{G}): n^{1-\varepsilon}.$$

Andererseits belegt er an gewissen Sterngebieten  $\mathfrak{S}$ , daß schon mäßige Irregularitäten des Randes die Konvergenz am Rande ausschließen. (Anm. d. Ref.: Bei der Näherungskonstruktion für  $\mathfrak{S}$  muß in  $z_0, z_1, \dots$  ein Winkel  $\neq \frac{\pi}{k}$ ,  $k \geq 1$  ganz, angenommen werden, um die für den Beweisgang unentbehrliche Unbeschränktheit der Folge  $\Pi_n^{(k)}(z)$  in der Umgebung von  $z_1$  zu sichern.) — Der zweite Teil behandelt die Möglichkeit, alle  $f(z)$  von beschränktem Quadratmittel  $\iint_{\mathfrak{G}} |f(z)|^2 dx dy$  in  $\mathfrak{G}$  im Quadratmittel beliebig genau durch Polynome anzunähern, d. h. für  $\varepsilon > 0$   $\iint_{\mathfrak{G}} |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy < \varepsilon$

für  $n$  groß, geeignetes  $P_n(z)$ . Diese „Abgeschlossenheit des Polynomsystems in bezug auf  $\mathfrak{G}$ “ liegt i. a. nicht vor, wenn  $\Gamma$  unterschiedene Punkte gleicher Koordinate hat. Verf. gibt hier ein Beispiel eines Gebiets, das über 1 zwei Randpunkte hat (ähnlich wie bei Berührung des  $|z| = 1$  durch einen inneren Kreis; hier liegt keine Abgeschlossenheit vor), deren gebietsinnere  $\delta$ -Nachbarschaften indes nicht nur vom Winkel Null, sondern so schmal werden, daß ihre Beiträge zum Quadratmittel für  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$  bei  $\delta \rightarrow 0$  verschwinden; damit ist die Abgeschlossenheit in diesem Falle gesichert. An Hand eines Satzes in umgekehrter Richtung läßt sich erkennen, daß die Abgeschlossenheit eine wesentlich metrische, nicht topologische Gebietseigenschaft ist. Ullrich.



**Hille, Einar: Contributions to the theory of Hermitian series.** Duke math. J. 5, 875—936 (1939).

Es wird eine ausholende Untersuchung Hermitescher Reihenentwicklungen im komplexen Gebiet durchgeführt, die sich zum Ziele setzt, die Analogien bzw. die charakteristischen Abweichungen gegenüber den klassischen Verhältnissen bei Potenz- und Dirichletreihen festzustellen. Die Hermitereihen

$$\sum f_n h_n(z) \quad \text{mit} \quad h_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z)$$

konvergieren in einem Streifen  $-\tau < \Im z < \tau$ , wofür hier ein sehr zugänglicher Beweis ausgeführt wird; es ist  $\tau = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f_n|}{\sqrt{2n+1}}$ . Die erforderlichen Grundlagen

bezüglich des asymptotischen Verhaltens der  $h_n(z)$  verschafft sich Hille durch die von ihm ausgebauten und vielfach benutzten Verfahren zur asymptotischen Integration der Differentialgleichung über die zugeordnete Integralgleichung; das Verfahren ist erheblich einfacher als früher benutzte und liefert für den vorliegenden Zweck die wichtige Erkenntnis, daß  $h_n(z)$  und  $\cos\{\sqrt{2n+1}z - \frac{1}{2}n\pi\}$  durch eine lineare Funktionaltransformation verknüpft sind, wofür die Integralgleichung einen expliziten Ausdruck bringt. — Die  $h_n(z)$  sind nach der Differentialgleichung Eigenfunktionen

des Operators  $\delta_z = z^2 - \frac{d^2}{dz^2}$  zum Eigenwert  $2n+1$ . Ganze Funktionen  $G(w)$  dieses Operators,  $G(\delta_z)$ , spielen hier bei Hermitereihen eine ähnlich bedeutende Rolle wie bei Potenz- und Dirichletreihen; während aber dort ganze Funktionen höchstens vom

Minimaltyp der Wachstumsordnung 1 für den Operator  $\frac{d}{dt}$  hereinkommen, ist hier

Minimaltyp der Ordnung  $\frac{1}{2}$  zu fordern. Diese Ideengänge (die an Pólyas Kreis anknüpfen) werden insbesondere dazu benutzt, um regularitätserhaltende Faktorenfolgen (Transformationen)  $a_n$  auszumitteln:  $\sum a_n f_n h_n(z)$  hat denselben Konvergenzstreifen wie  $\sum f_n h_n(z)$ , wenn  $(\log |a_n|) : \sqrt{n} \rightarrow 0$  vorausgesetzt wird — wie aber beeinflussen die  $a_n$  die Singularitäten außerhalb des Streifens? Hier ergeben sich ganz besonders Seitenstücke zu wohlbekannten Fortsetzungssätzen bei Potenz- und Dirichletreihen und weitere Anwendungen zur Feststellung von Randsingularitäten aus der Struktur der Koeffizientenfolge  $f_n$ . Auch Lückensätze und Sätze über die Konvergenzgrenze als natürliche Grenze werden übertragen. — Die oben erwähnte funktionale Zuordnung von  $h_n(z)$  und  $c_n(z) = C_n \cos\{\sqrt{2n+1}z - \frac{1}{2}n\pi\}$  veranlaßt die Behandlung der zugeordneten Fourier- und Dirichletreihen — die Konstanten  $C_n$  bestimmen sich aus den Anfangswerten der  $h_n$  —

$$C(z) = \sum_0^\infty f_n c_n(z) \quad \text{bzw.} \quad S(z) = \sum_0^\infty f_n s_n(z) \quad \text{und} \quad E^\pm(z) = C(z) \pm iS(z)$$

( $s_n(z)$  wie  $c_n(z)$ , doch mit  $\sin$  statt  $\cos$ ). Daraus folgen: explizite Darstellungen für die Transformationen zwischen  $f(z)$  und seinen zugeordneten Funktionen, die Regularität von  $f(z)$  im Durchschnitt der Mittag-Lefflerschen Hauptsterne für  $C(\pm z)$ ; die Lückensätze erscheinen in gewisser Hinsicht als Bestaussagen; es gibt ganze Funktionen mit Konvergenzstreifen endlicher Breite! — Eine weitere Untersuchungsreihe zum Gegenstand ist angekündigt.

Ulrich (Gießen).

**Hille, Einar: Contributions to the theory of Hermitian series. II. The representation problem.** Trans. Amer. Math. Soc. 47, 80—94 (1940).

Vgl. vorstehendes Referat. Für die Entwickelbarkeit einer regulär analytischen Funktion von der Art

$$f(z) = \sum f_n H_n(z)$$

mit Konvergenz im Streifen  $-\tau < y < \tau$  wird eine gewisse Schätzbarkeit von  $f(z)$  als notwendig und hinreichend nachgewiesen, nämlich: Auf jedem parallelen Teilstreifen  $-\beta \leq y \leq \beta (< \tau)$  muß eine Schranke  $\bar{B}(\beta)$  existieren, so daß dort für alle  $x$

$$\log |f(x + iy)| \leq -|x| \sqrt{\beta^2 - y^2} + \bar{B}(\beta)$$

gilt. — Zusammen mit einem der bekannten Sätze im Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreise über das identische Verschwinden regulär analytischer Funktionen, die in beiden Richtungen einer Geraden wie  $e^{-k|z|}$  gegen 0 streben, in einer der Halbebenen aber höchstens vom Normaltyp der Ordnung 1 wachsen, folgt, daß die Hermiteentwicklung einer ganzen Funktion von diesem Wachstum nie außerhalb einer Geraden (reellen Achse) konvergieren kann bzw. umgekehrt, daß ein echter Konvergenzstreifen nur bei Funktionen mindestens vom Maximaltyp der Ordnung 1 oder bei höherer Ordnung erscheint. Endlich findet sich folgende interessante „beste“ Bemerkung: Sei  $f(z)$  meromorph für  $y > -\alpha$ ,  $a_\nu$  und  $b_\nu$  die Nullstellen und Pole in dieser Halbebene, mit  $\Im b_\nu \geq \beta > 0$ ; mit  $\alpha_\nu = \arg a_\nu$ ,  $\beta_\nu = \arg b_\nu$  und bei Summation über den Kreis vom Radius  $r$  sei

$$d = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left\{ \sum \sin \beta_\nu - \sum \sin \alpha_\nu \right\}$$

$$q = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r \log r} \int_0^\pi \log |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi \, d\varphi,$$

dann gilt  $\tau \leq \min(\alpha, \beta, q + \pi d)$ . Es überrascht,  $d$  und  $q$  als Bildungen verschiedener Wachstumsdimension verbunden zu sehen. *Ullrich* (Gießen).

**Stoilow, S.: Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces.** *Compositio Math.* **7**, 428—435 (1940).

Betrachtet wird eine Klasse Riemannscher Flächen, die durch die Forderung der „normalen Ausschöpfbarkeit“ topologisch charakterisiert wird. Der Begriff der normalen Ausschöpfbarkeit gründet sich auf den der „inneren Transformation“ (vgl. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Paris: Gauthier-Villars 1937; dies. Zbl. **17**, 378). Beispiele normal ausschöpfbarer Flächen sind die von ganzen Funktionen der Ordnung  $< \frac{1}{2}$  und die von  $g(\varphi(z))$

$[g(z)$  eine ganze Funktion der Ordnung  $< \frac{1}{2}$  und  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n!} a^{2^n}$ ,  $a$  ganz  $\geq 5]$  erzeugten Riemannschen Flächen. Für ganze Funktionen, deren Flächen zur betrachteten Klasse gehören, kann im Ahlforsschen Scheibensatz die Schranke drei durch zwei ersetzt werden. *Wittich* (Göttingen).

**Garwick, Jan V.: Über das Typenproblem.** *Arch. Math. og Naturvid.* **43**, Nr 3, 1—14 (1940).

Durch eine neue sehr bequeme Art spezieller quasikonformer Hilfsabbildungen an Hand der Streckenkomplexdarstellung und unter einfacher Weiterführung eines von Kakutani und Teichmüller entwickelten Verfahrens gibt Verf. einen Beweis für das von Wittich zuerst in seiner Doktorarbeit entwickelte Typenkriterium; es handelt sich um Flächen, die über endlich vielen Grundpunkten logarithmisch (aber nicht algebraisch) verzweigt sein dürfen. *Ullrich* (Gießen).

**Vignaux, J. C.: Über die Normalfamilie der  $(\alpha)$ -holomorphen Funktionen.** *Contrib. estud. ci. fis. mat.* **1**, 465—490 (1938) [Spanisch].

Verf. stellt einige Sätze auf, die sich auf Familien  $(\alpha)$ -holomorpher Funktionen  $f(z)$  beziehen (d. h. solcher, die eine stetige Flächenderivierte besitzen), die in einem Gebiet  $D$  mit dem Rand  $C$  definiert sein mögen. Eine Familie von Funktionen  $f(z)$ , die auf  $C$  gleichmäßig beschränkt sind und deren areolare Ableitungen in  $D$  gleichmäßig beschränkt sind, ist im Innern von  $D$  im Sinne der üblichen Montelschen Definition normal. Für die  $(\alpha)$ -holomorphen Funktionen gilt jedoch kein Analogon des Weierstrassschen Satzes; man kann lediglich sagen, daß, wenn die Folge  $f_n(z)$  gleichmäßig auf  $C$  gegen  $f(z)$  konvergiert und die Folge der areolaren Ableitungen  $\varphi_n(x)$  gleichmäßig in  $D$  gegen  $\varphi(z)$  strebt,  $f(z)$   $(\alpha)$ -holomorph ist und  $\varphi(z)$  zur areolaren Ableitung hat. Die Sätze werden auf  $(\alpha)$ -holomorphe Funktionen von zwei Veränderlichen übertragen. — Weiterhin betrachtet Verf. polygene Funktionen der bidualen Veränderlichen  $z = x + ky$  ( $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$ ;  $i^2 = -1$ ,  $k^2 = 0$ ), d. h. Funktionen der



Gestalt  $u(x, y) + kv(x, y)$ , worin  $u$  und  $v$  holomorphe Funktionen von  $x, y$  bedeuten, und zeigt, daß eine in ihrem Definitionsgebiet gleichmäßig beschränkte Familie derartiger Funktionen normal ist. *E. Martinelli* (Rom).

**Vignaux, J. C.:** Über die analytische Fortsetzung der polygenen Funktionen. *Contrib. estud. ci. fis. mat.* **1**, 491—503 (1938) [Spanisch].

In den abgeschlossenen Gebieten  $D_1, D_2$ , in die das Gebiet  $D$  durch eine Kurve  $L$  getrennt wird, seien die  $(\alpha)$ -holomorphen Funktionen  $f_1(z), f_2(z)$  vorgegeben; Verf. erweitert den Satz von Painlevé, indem er beweist, daß, wenn die beiden Funktionen so wie ihre areolaren Ableitungen auf  $L$  zusammenfallen,  $f_1(z), f_2(z)$  als gegenseitige analytische Fortsetzungen (die natürlich nicht eindeutig bestimmt sind) angesehen werden können insofern, als sie ein und dieselbe  $(\alpha)$ -holomorphe, in  $D$  definierte Funktion  $f(z)$  darstellen. Daraus läßt sich das Analogon des Schwarzschen Spiegelungsprinzips für die  $(\alpha)$ -holomorphen Funktionen ableiten. Weiterhin überträgt Verf. den Painlevé'schen Satz auf die im gewöhnlichen Sinne holomorphen Funktionen zweier komplexer Variablen [diese Erweiterung wurde schon von Severi, *Mem. Accad. Ital.* **1931**, Nr 6, und später von Caccioppoli, *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 209 (1934); dies. Zbl. **10**, 123 vorgenommen] und auf die polygenen Funktionen zweier komplexer Variablen.

*E. Martinelli* (Rom).

**Vignaux, J. C.:** Die Funktionen einer und mehrerer komplexer Variablen auf einer beliebigen Fläche. *An. Soc. Ci. Argent.* **128**, 3—9 (1939) [Spanisch].

Verf. überträgt die Sätze von Painlevé und Schwarz über analytische Fortsetzung auf die Funktionen einer komplexen Variablen, die im Sinne von Beltrami auf einer Fläche definiert ist. Weiterhin betrachtet er Funktionen zweier komplexer Variablen, von denen jede auf einer Fläche definiert ist, und beweist für solche Funktionen die Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel in der engeren Fassung.

*E. Martinelli* (Rom).

**Capelli, Pedro F.:** Über die holomorphen und polygenen Funktionen einer binären komplexen Variablen. *An. Soc. Ci. Argent.* **128**, 154—174 (1939) [Spanisch].

Verf. betrachtet monogene und polygene Funktionen  $u(x, y) + \alpha v(x, y)$  der binären komplexen Veränderlichen  $x + \alpha y$ , wo  $\alpha^2 = \mu + \nu\alpha$  und  $\mu, \nu$  willkürliche reelle Konstanten bezeichnen. Durch geeignete Wahl der Einheiten lassen sich solche Funktionen auf Funktionen der gewöhnlichen komplexen Veränderlichen ( $\alpha^2 = -1$ ), oder der dualen Veränderlichen ( $\alpha^2 = 0$ ), oder der hyperbolischen Veränderlichen ( $\alpha^2 = 1$ ), zurückführen; für den zweiten Fall vergleiche Kramer, *Amer. J. Math.* **52**, 370 (1930); im letzten Fall führen die Bedingungen der Monogenität auf die Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , der auch  $v$  genügen muß. Es werden einige elementare Eigenschaften der entsprechenden monogenen Funktion angegeben; bei einer polygenen Funktion sind die Bilder der Richtungsderivierten in einem Punkte gleichseitige Hyperbeln.

*E. Martinelli* (Rom).

**Serbin, H.:** Weierstrass preparation theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 168 (1940).

Ein sehr einfacher Beweis durch vollständige Induktion des Satzes von H. Späth [J. reine angew. Math. **161**, 95—100 (1929)]. *Behnke* (Münster i. W.).

**Aravyskaya, E.:** Sur l'approximation des fonctions, régulières dans un domaine convexe relativement à certaines classes de fonctions. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* **2**, 37—41 u. franz. Zusammenfassung 42 (1938) [Russisch].

1. Unter der Voraussetzung, daß für ganz im Innern liegende abgeschlossene Mengen eines Regularitätsbereiches  $\Re$  der Heine-Borelsche Überdeckungssatz gilt, beweist Verf., daß sich  $\Re$  von innen durch Bereiche approximieren läßt, die ihrerseits nur von analytischen Hyperflächen begrenzt werden. 2. Verf. beweist den zuerst von André Weil angegebenen Satz: In jedem Bereiche, dessen Hülle polynomkonvex ist, gilt der Runge'sche Satz. — Siehe zu beiden Aussagen auch andere Autoren. Zu 1. etwa H. Behnke (dies. Zbl. **21**, 421); zu 2. etwa A. Weil (dies. Zbl. **4**, 120). *Behnke*.

**Fuchs, B. A.:** Über eine Eigenschaft der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Metrik. *Rec. math. Moscou*, N. s. 5, 497—503 u. deutsch. Zusammenfassung 504 (1939) [Russisch].

Es werden durch geometrische Eigenschaften ausgezeichnete Sonderfälle der Geometrie untersucht, die einem Bereiche im  $z_1, z_2$ -Raum durch die gegenüber analytischen Abbildungen invariante Bergmannsche Kernfunktion aufgeprägt werden. *Behnke* (Münster i. W.).

**Stein, Karl:** Über das zweite Cousinsche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss.* 1939, 139—149 (H. 1/2).

Unter dem zweiten Cousinschen Problem versteht man die Frage nach der Existenz einer Funktion  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , die in einem vorgegebenen Bereiche  $\mathfrak{B}$  des Raumes der  $z_1, z_2, \dots, z_n$  regulär ist und dort vorgeschriebene Nullstellenmannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}$  aufweist.  $\mathfrak{M}$  muß aus analytischen Flächen bestehen. Diese Bedingung ist hinreichend in Zylinderbereichen, bei denen von den Projektionen höchstens eine mehrfach zusammenhängend ist. Für die übrigen Zylinderbereiche trifft dies aber nicht zu. K. Oka (siehe dies. Zbl. 20, 240) wie auch Verf. zeigen, unabhängig voneinander, daß die hinzutretenden Bedingungen rein topologischer Art sind. Insbesondere kündigt Verf. folgende Ergebnisse an: 1. Zu einer Cousinschen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen in einem beliebigen Bereiche  $\mathfrak{B}$  des  $R_4$  existiert höchstens dann eine Lösungsfunktion, wenn die zu einer zweidimensionalen Homologiebasis in  $\mathfrak{B}$  gehörigen charakteristischen Zahlen von  $V$  sämtlich Null sind. 2. Für alle Zylinderbereiche sind die angegebenen Bedingungen auch hinreichend. 3. Damit eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion  $g$  dort eine teilerfremde Quotientendarstellung zuläßt, ist wiederum die Bedingung unter 1. notwendig. In Zylinderbereichen ist die Bedingung hinreichend. 4. Es gibt Regularitätsbereiche  $\mathfrak{R}$ , in denen die dort regulären Funktionen nicht einmal alle durch rationale Funktionen approximiert werden können, für die Pole in  $\mathfrak{R}$  zugelassen sind. *Behnke* (Münster i. W.).

**Buler, G.:** Sur quelques questions de la théorie des fonctions méromorphes dans le bicylindre unité. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 2, 164—184 u. franz. Zusammenfassung 185—186 (1938) [Russisch].

Im Anschluß an die Untersuchungen von Stefan Bergmann [*Compositio mathematica* 3 (1936); dies. Zbl. 14, 319] werden die im Einheitsdizylinder meromorphen Funktionen  $f(z_1, z_2)$  behandelt. Die Ordnung des Wachstums einer solchen Funktion wird in bezug auf die ausgezeichneten Randmannigfaltigkeiten  $|z_1| = r$ ,  $|z_2| = r^\alpha$ ,  $r < 1$ ,  $\lim r = 1$ ,  $\alpha > 0$  definiert. Es werden sodann Sätze für diese Funktionen  $f(z_1, z_2)$  aufgestellt, die der Nevanlinnaschen Theorie nachgebildet sind. *Behnke* (Münster).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

**Pietra, Gaetano:** Gli studi italiani di statistica metodologica ed applicata, di calcolo di probabilità e di matematica attuariale nell'anno XVI E. F. (27. rivun., Bologna, 4.—11. IX. 1938.) *Atti Soc. ital. Progr. Sci.* 2, 69—129 (1939).

Verf. gibt eine kurze, einordnende Übersicht und kritische Wertung der im 16. Jahr faschistischer Zeitrechnung, d. h. November 1937 bis Oktober 1938, von italienischen Autoren auf den Gebieten der methodologischen und angewandten (soweit methodisch von Bedeutung) Statistik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Versicherungsmathematik publizierten Arbeiten. In der methodologischen Statistik stehen die von Gini angeregten Untersuchungen von Gini, Cisbani, Pietra, Pizzetti, Zappa u. a. über die Theorie der Mittelwerte im Vordergrund, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die hauptsächlich von Cantelli, Castelnovo und De Finetti behandelte Grundlagenfrage. Besondere Würdigung erfährt naturgemäß auch auf fast allen Anwendungsgebieten der Statistik, sei es Demographie und Anthropometrie, sei es Biometrie und Eugenik, sei es Kolonialwesen, Volkswirtschaft, die umfassende und durchdringende, wegbahnende Tätigkeit Ginis und seiner Schule, wobei auch das Wirken des unter Gini Vorsitz stehenden C. I. S. P. (Italienischen Comités für das Studium der Bevölkerungsprobleme) hervorzuheben ist. Auf dem Gebiete der Bevölkerungspolitik verdienen die Arbeiten von Benini, Boldrini, De Vergottini u. a. in diesem Rahmen Beachtung.



Eine gerechte und wahrheitsgetreue Beurteilung des italienischen Schrifttums kann natürlich nur an Hand des Pietraschen Originalberichtes selbst erfolgen. *M. P. Geppert.*

**Pankraz, Otomar:** Sur la notion de probabilité. Čas. mat. fys. 69, Nr 2, D 73—D 81 (1940) [Tschechisch].

Rapport sur les notions fondamentales du Calcul des probabilités; pour introduire les axiomes l'auteur considère certaines relations auxiliaires. *B. Hostinský.*

**Goodstein, R. L.:** On von Mises' theory of probability. Mind 49, 58—62 (1940).

Kritische Bemerkungen zu v. Mises' Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. „The probability problems of classical mathematics are best regarded as problems in pure probability, i. e. problems about mathematical configurations and not as problems in applied probability. Pure probability is an entirely mathematical conception and predicts nothing about the results of actual experiments.“ *Kamke.*

**Onicescu, Octav:** La probabilité d'un événement isolé. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 22, 280—286 (1940).

Verf. unterscheidet in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zwei Deutungen: die logische, welche die möglichen Wahrscheinlichkeitsstrukturen betrachtet und sich dabei insbesondere auf den Begriff der „Wahrscheinlichkeit eines einzigen Ereignisses“ stützt, und die statistische, wo die Wahl einer Wahrscheinlichkeitsstruktur unter allen anderen möglichen Strukturen an Hand statistischer Beobachtungen vorgenommen wird („W.-Struktur“ nennt Verf. die übliche „W.-Verteilung“). *Bruno de Finetti.*

**Church, Alonzo:** On the concept of a random sequence. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 130—135 (1940).

Verf. gibt nach einer Übersicht über die Versuche, zu einer mathematisch einwandfreien Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit zu gelangen, eine eigene Definition, bei der nicht beliebige Teilfolgen auftreten, sondern nur solche, die mittels „wirklich berechenbarer“ Funktionen [effectively calculable functions; s. hierzu Church, Amer. J. Math. 58, 345—363 (1936); dies Zbl. 14, 98] gebildet werden können. Ist  $a_1, a_2, \dots$  eine Folge von Nullen und Einsen, so wird, damit derartige Funktionen natürlicher Zahlen angewendet werden können, die Hilfsfolge  $b_1 = 1, b_{k+1} = 2b_k + a_k$  gebildet. Die Folge  $a_1, a_2, \dots$  ist nun nach Church eine Zufallsfolge mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ , wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind: (a) ist  $f(n)$  die Anzahl der Einsen unter  $a_1, \dots, a_n$ , so ist  $\frac{f(n)}{n} \rightarrow p$  für  $n \rightarrow \infty$ ; (b) für jede wirklich berechenbare Funktion  $\varphi(n)$  natürlicher Zahlen ist auch  $\frac{g(n)}{n} \rightarrow p$ ; dabei ist  $g(n)$  die Anzahl der Einsen unter  $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$  und die Indizes  $k_v$  sind durch die Forderung bestimmt, daß  $\varphi(b_{k_v}) = 1$  sein soll. Die Beziehung dieser Wahrscheinlichkeitsdefinition zu den von Copeland und Wald gegebenen Definitionen wird diskutiert. *Kamke.*

**Onicescu, Octav, et G. Mihoc:** Sur une généralisation de l'urne de Bernoulli. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 8, 61—77 (1937); 9, 57—75 (1938).

Soient  $U_1, U_2, \dots, U_m$ ,  $m$  urnes contenant des boules blanches et des boules noires,  $p_i, q_i$  les probabilités d'extraire une boule blanche ou une boule noire dans  $U_i$ . Après une extraction de l'urne  $U_i$  l'extraction suivante se fera dans  $U_{i+1}$  ou  $U_{i-1}$  suivant que dans  $U_i$  l'extraction a donné une boule noire ou une boule blanche (les indices doivent être réduits mod  $m$ ). Soit  $P_{n,k}$  la probabilité pour que la  $n^{\text{ème}}$  extraction donne une boule blanche, en partant de  $U_k$ . Les aut. étudient le comportement asymptotique de  $P_{n,k}$  et de la probabilité que dans  $n$  extractions successives on obtienne un nombre donné de fois la boule blanche. On suppose  $p_i \neq 0, 1$  et on trouve que  $P_{n,k} \rightarrow P =$  indépendant de  $k$  pour  $n \rightarrow \infty$  si  $m \equiv 1 \pmod{2}$  et  $(P_{1,k} + P_{2,k} + \dots + P_{n,k})/n \rightarrow P =$  indépendant de  $k$  pour  $n \rightarrow \infty$  si  $m \equiv 0 \pmod{2}$ . La valeur de  $P$  est donnée et s'obtient facilement comme une moyenne des nombres  $p_i$ , à l'aide des éléments de la matrice stochastique

$$\begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & \dots & p_1 \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & q_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_m & 0 & 0 & \dots & p_m & 0 \end{pmatrix}$$

correspondant au problème et dont l'étude des valeurs caractéristiques permet de faire la discussion. T. Popoviciu (Cernăuți).

**Doebelin, W.:** Remarques sur la théorie métrique des fractions continues. *Compositio Math.* **7**, 353—371 (1940).

Soit  $x$  un nombre irrationnel compris entre 0 et 1,

$$x = \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \dots \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}};$$

$a_n$  est la partie entière de  $x_n$ ,  $x_n$  ( $a_n$ ) est le  $n^{\text{ième}}$  quotient complet (incomplet). Nous écrivons  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ; la relation entre  $x$  et  $x_n$  s'écrit  $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n)$ .  $x$  est une fonction de  $x_n$  de la forme  $x = (P_n x_n + P_{n-1}) / (Q_n x_n + Q_{n-1})$ . Posons  $y_n = Q_{n+1} / Q_n$ ; on a  $y_n = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ . La probabilité pour que  $x_n > x$ , les  $a_1, \dots, a_{n-1}$  étant connus, est égale à  $(y_{n-1} + 1) / (y_{n-1} \cdot x + 1)$  (E. Borel, *Rend. Circ. mat. Palermo* **26**, 247 (1909); P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937, Chap. IX; ce Zbl. **16**, 170]. D'autres résultats de cette nature ont été obtenus par divers géomètres et l'auteur montre qu'une certaine partie de ces résultats peut être démontrée en utilisant la théorie des chaînes à liaisons complètes [voir W. Doeblin et R. Fortet, *Bull. Sci. math.* (2) **65**, 132 (1937); ce Zbl. **18**, 33].

B. Hostinský (Brünn).

**Onicescu, O., et G. Mihoc:** Sur les sommes de variables enchainées dans le cas d'un ensemble numérable de valeurs. *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* **22**, 231—236 (1940).

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  une suite de variables aléatoires liées en une chaîne de Markoff. L'auteur étudie les probabilités relatives aux différentes valeurs que peut prendre la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\theta$ ,  $\theta$  étant une constante. Chacune des variables  $x_k$  peut prendre une des valeurs en nombre infini  $a_1, a_2, \dots$ ; ce cas a été étudié par R. Fortet dans sa thèse (voir ce Zbl. **21**, 338). Il détermine la valeur de la constante  $\theta$  par une méthode voisine de celle qui a été employée par A. A. Markoff (voir Markoff-Liebmann, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig-Berlin. 1912. Anhang II) dans le cas où les variables  $x_k$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes.

B. Hostinský (Brünn).

**Lévy, Paul:** Extensions stochastiques des notions de série, d'intégrale et d'aire. *C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 591—593 (1939).

Soit une série semi-convergente  $\sum u_n$ ; à chaque  $u_k$  faisons correspondre un poids positif  $\alpha_k$  ( $\alpha_k$  tendant vers zéro pour  $k$  infini). Supposons que  $\sum \alpha_k$  soit fini. Choisissons au hasard parmi les  $u_h$  un premier terme  $U_1$ , les probabilités attribuées aux différents  $u_h$  étant proportionnelles à leurs poids; écartant le terme choisi, nous choisirons de la même manière un second terme  $U_2$ ; et ainsi de suite. Il est presque sûr que la suite des  $U_n$  comprend tous les  $u_n$ . Posons  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ; il existe deux nombres  $s'$  et  $s''$  (non aléatoires, finis ou infinis) tels que Probabilité  $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf S_n = s', \lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n = s'' \right\} = 1$ . Si  $s'$  et  $s''$  ont une même valeur finie  $s$ , nous dirons que la série  $\sum u_k$  est stochastiquement convergente, pour les poids  $\alpha_k$ ;  $s$  est sa somme stochastique. — L'auteur introduit ensuite la notion d'intégrale stochastique d'une fonction donnée prise le long d'une ligne polygonale  $C$  inscrite dans une courbe donnée  $C_1$ ; les sommets de  $C$  sont choisis au hasard sur  $C_1$ . — Il considère enfin des aires qu'il appelle stochastiques.

B. Hostinský (Brünn).

**Ambrose, Warren:** On measurable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **47**, 66—79 (1940).

The paper gives precisions and continuations to some of the results of J. L. Doob



on stochastic process depending upon a continuous parameter (this Zbl. 17, 27). Let  $R$  be the space of all real-valued functions  $x(t)$ ,  $t \in T$ ,  $T = (-\infty, \infty)$ , where the neighbourhood is defined by a finite number of inequalities  $a_i < x(t_i) < b_i$ . Let a probability measure  $P(M)$  be defined on the Borel field of sets of  $R$ , and let  $R'$  be a subset of  $R$  for which the outer measure  $\bar{P}(R') = 1$ . If  $M'$  is the intersection of  $R'$  with a  $P$ -measurable set  $M \subseteq R$ , then we define the measure  $P'(M')$  by  $P(M)$ ; the space  $R'$  together with the probability measure  $P'(M')$  is called a stochastic process (s. p.). Denote by  $x_s(r)$  the value at  $t = s$  of the point  $r = x(t) \in R$ , then the s. p. consisting of  $R'$  with a  $P'$ -measure on it is called measurable if  $x_t(r)$  is measurable in the product space  $T \times R'$ . These definitions are due to Doob, loc. cit. The theorem 1 states that the space  $R$  contains a measurable s. p. if and only if  $P$ -measure is so defined that there exists a measurable function in  $T \times R$  which for each fixed  $t$  equals to  $x_t(r)$  at almost all  $r$ -points. Such a measurability theorem makes possible certain applications of the ergodic theorems. The proof of theorem 1 appeals to Doob's results, loc. cit. After obtaining variations of theorem 1, the author gives a criterion for the existence of measurable s. p. by the uniform boundedness of the conditional probabilities. In particular, theorem 8 asserts, when  $R$  is a Markoff process, the existence of a measurable s. p. enjoying a certain continuity property. Kôsaku Yosida (Osaka).

**Hartley, H. O.:** Recent advances in mathematical statistics. Bibliography of mathematical statistics (1937, second half, and 1938). J. Roy. Statist. Soc. 102, 406—444 (1939).

**Riebesell, Paul:** Neuere Ergebnisse der mathematischen Statistik. Bl. Versich.-Math. 4, 413—424 (1939).

Der gekürzt wiedergegebene Vortrag des Verf. enthält einen Überblick über neuere Verteilungsfunktionen und Vergleichsmethoden der mathematischen Statistik, die bisher noch keine oder keine ausreichende Aufnahme in deutschsprachige Lehrbücher gefunden haben ( $\chi^2$ -Methode, Verteilungen von „Student“, Eggenberger-Pólya und Pollaczek-Geiringer).

Hans Münzner (Göttingen).

**Gunten, Paul von:** Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes für den komplexen Zahlenbereich. Bern: Diss. 1939. 34 S.

Im Definitionsraum der komplexen Fehler soll die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\varphi$  eine für alle Punkte  $z = x + iy$  definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften sein: a)  $\varphi(z) \geq 0$ , b)  $\varphi(z)$  ist in jedem endlichen Gebiet der Ebene im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar, c) das uneigentliche Doppelintegral

$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + iy) dx dy$  existiert und ist  $= 1$ . Durch Vorgabe einer Hypothese und

Aufstellen der durch sie bestimmten Funktionalgleichung gewinnt man verschiedene Formen für das „Fehlergesetz“ oder die „Fehlerverteilung“  $\varphi$ . Diese Funktionalgleichung ist dann unter Voraussetzung einer bestimmten Funktionseigenschaft der Verteilungsfunktion zu lösen. Speziell wird postuliert: I.  $\varphi(x + iy) = \varphi(|x + iy|)$ ,

II.  $\varphi(x + iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + i\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta + iy) d\zeta$ . Setzt man:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + i\zeta) d\zeta = \Phi(x)$ ,

so läßt sich zeigen, daß die sich für  $\Phi$  ergebende Funktionalgleichung in Gestalt einer Integralgleichung vom Faltungstypus geschrieben werden kann, daß also die von Doetsch behandelte Laplacetransformation zur Lösung heranzuziehen ist. Vom Verf. wird gelöst: A) die Funktionalgleichung  $\Phi(x) \cdot \Phi(\sqrt{a^2 - x^2}) = \Phi(0) \cdot \Phi(a)$ , und zwar 1. unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $\Phi(x)$ , 2. unter Voraussetzung der Stetigkeit von  $\Phi(x)$  und 3. unter Voraussetzung der einseitigen Stetigkeit;

B) die Funktionalgleichung  $\Phi(\zeta) = \frac{1}{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right) \Phi\left(\frac{\zeta - u}{\beta}\right) du$  mit  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , und

zwar unter Voraussetzung der Integrierbarkeit von  $\Phi(x)$ . Rehbock.

**Baumberger, Alfons:** Über Verteilungsfunktionen in der Kollektivmaßlehre. Bern: Diss. 1938. 66 S.

Verf. behandelt zunächst kurz die wichtigsten arithmetischen Verteilungsfunk-

tionen (Verteilungen von Bernoulli, Poisson, Pascal, Eggenberger-Pólya, Pollaczek-Geiringer und die Reihenentwicklung von Charlier). Er stellt zum Vergleich ihre Nullmomente, Hauptmomente, Faktorenmomente, Halbinvarianten, erzeugenden Funktionen und Differenzengleichungen in Tabellen zusammen und gibt die Formeln zur Berechnung der Parameter aus den Momenten an. Weiter wird gezeigt, wie sich einzelne der Verteilungen durch spezielle Wahl der Parameter und durch Grenzübergänge aus anderen Verteilungen herleiten lassen. Schließlich werden die genannten Verteilungsgesetze für den Fall von Inhomogenität des Beobachtungsmaterials erweitert, wobei in dem in Serien eingeteilten Beobachtungsmaterial nach dem Vorbild der Lexisschen Dispersionstheorie zwischen Inhomogenität innerhalb der einzelnen Serien und Inhomogenität von Serie zu Serie unterschieden wird.

Hans Münzner (Göttingen).

Schäfer, Wilhelm: Die mathematisch-statistische Bewertung von Stichproben und deren Bedeutung für die Beurteilung von Tierversuchen. III. Das Problem der Rückschluß-Wahrscheinlichkeit. Arb. Staatl. Inst. exper. Ther. Frankf. H. 38, 91—114 (1939).

Ist ein Ereignis unbekannter Grundwahrscheinlichkeit in  $n$  Versuchen  $v = n \cdot P$  mal eingetroffen, so gelangt Verf., von dem Ansatz

$$\eta = \sum_{\lambda=v}^n w_{x_1} \left( \frac{\lambda}{n} \right) - h \cdot w_{x_1}(P); \quad \zeta = \sum_{\lambda=0}^v w_{x_2} \left( \frac{\lambda}{n} \right) - (1-h) \cdot w_{x_2}(P)$$

für die Mutungsgrenzen  $x_1, x_2$  der wahren Grundwahrscheinlichkeit  $x$  ausgehend und lediglich auf den Voraussetzungen  $\int_0^1 v_P(x) dx = 1$ ,  $v_P(x) = v_{1-P}(1-x)$  fußend, durch die Wahl von  $h(v) = \frac{n-v}{n}$  zu einer neuen Verteilung der Rückschlußwahrscheinlichkeit  $x$ :

$$v_P(x) = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{v^2}{x} + \frac{(n-v)^2}{1-x} \right) \cdot w_x(P) \quad \text{mit} \quad w_x(P) = \binom{n}{v} \cdot x^v \cdot (1-x)^{n-v}.$$

Gegenüber der von von Schelling [Zur Beurteilung von Stichproben, Astron. Nachr. 264, 30—31 (1937)] angegebenen Rückschlußverteilung, die aus demselben Ansatz mittels  $h = \frac{1}{2}$  hervorgeht, hat diese Verteilungsfunktion den Vorteil, ebenso wie die Bayessche als dichtesten Wert  $x = \frac{v}{n} = P$  zu ergeben. (Vgl. dies. Zbl. 17, 125.) M. P. Geppert.

Fisher, R. A.: The sampling distribution of some statistics obtained from nonlinear equations. Ann. of Eugen. 9, 238—249 (1939).

Verf. wirft die Frage nach der Verteilung statistischer Maßzahlen auf, die die Lösung nichtlinearer Gleichungen erfordern. Speziell wird die gleichzeitige Verteilung der  $p$  Wurzeln  $\theta$  der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \theta A_{11}, & \dots, & a_{1p} - \theta A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} - \theta A_{p1}, & \dots, & a_{pp} - \theta A_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt, wobei  $a_{ij}$  und  $A_{ij}$  Produktsummen von je zwei Faktoren der  $p$  Variablen  $x_1, \dots, x_p$  sind, und zwar  $A_{ij}$  ( $n_1 + n_2$  Freiheitsgrade) aus dem gesamten Wertevorrat,  $a_{ij}$  ( $n_1$  Freiheitsgrade) dagegen aus einem durch den zu untersuchenden Unterscheidungsgrund bestimmten Ausschnitt desselben gewonnen wird. M. P. Geppert.

Gumbel, E. J.: La probabilité des hypothèses. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 645—647 (1939).

R. A. Fisher hat zum ersten Male in seinen Statistical methods for research workers, 4. ed. (1932), § 21, 1 darauf hingewiesen, daß man jeder beliebigen Wahrscheinlichkeitsdichte eine rechteckige Verteilung eindeutig zuordnen kann. Wird nun einer Reihe von Meßwerten eine stetige theoretische Verteilung angepaßt und für diese die fragliche Transformation durchgeführt, so werden die den Messungen zuge-



ordneten Punkte nicht streng gleichverteilt sein. In ihrer Abweichung von der Gleichverteilung sieht Verf. ein Maß für die Güte der Anpassung. Für die Beurteilung der Abweichung schlägt er zwei Methoden vor. Die eine ist rein kombinatorisch, recht einfach, führt aber nicht immer zur Entscheidung zwischen zwei verschiedenen Anpassungen. Das zweite Verfahren beruht auf einer beachtlichen Anwendung der speziellen Bayes-Verteilung, für die hier einmal die Voraussetzung der theoretischen Gleichwahrscheinlichkeit erfüllt ist.

von Schelling (Berlin).

**Koshal, R. S.: Maximal likelihood and minimal  $\chi^2$  in relation to frequency curves.** Ann. of Eugen. 9, 209—231 (1939).

Verf. wendet das „Maximum-likelihood“-Verfahren auf die Interpolation an, anschließend an eine frühere Arbeit [J. Roy. Statist. Soc. 96 (1933)], in welcher er bereits zeigte, wie man mit dieser Methode befriedigendere Ergebnisse erzielt als mit der Momentenmethode. Da diese frühere Arbeit wegen gewisser darin enthaltener Rechenfehler von K. Pearson angegriffen worden war, nimmt Verf. die Frage von neuem auf und liefert weitere Beiträge dazu; er zeigt, wie man durch sukzessive Approximationen Interpolationskurven erhält, die sich den beobachteten Werten immer besser anpassen. In konkreten Fällen erzielt Verf. durch Anwendung des Verfahrens bessere Anpassung als durch die Momentenmethode.

T. Salvemini (Roma).

**Yates, F.: An apparent inconsistency arising from tests of significance based on fiducial distributions of unknown parameters.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 579—591 (1939).

Die von Behrens [Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen. Landw. Jb. 68, 807—837 (1929)] und Fisher [The fiducial argument in statistical inference. Ann. Eugenics 6, 91—398 (1935)] vorgeschlagene Echtheitsprüfung für die Differenz der Mittelwerte zweier Stichproben aus Gesamtheiten mit verschiedener Streuung ergibt einen geringeren Prozentsatz gesicherter Ergebnisse, als nach der Analogie mit dem gewöhnlichen  $t$ -Test zu erwarten wäre. Diese scheinbare Unzulänglichkeit des Verfahrens aufzuklären und die gegen dasselbe erhobenen Einwände zu entkräften, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Weiterhin zeigt Verf., daß die von Sukhatme [On Fisher and Behrens' test of significance for the difference in means of two normal samples. Sankhya 4, 39—48 (1938)] für das Behrens- und Fishersche Verfahren berechneten Tafeln auch für die Beurteilung eines gewogenen Mittels der Mittelwerte zweier Stichproben verwendbar sind.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

**Pearson, E. S.: Note on the inverse and direct methods of estimation in R. D. Gordon's problem.** Biometrika 31, 181—186 (1939).

In the preceding paper in Biometrika (Lond.) 31, 167—180 (1939), R. D. Gordon introduces a mathematical procedure for determining not only a single-valued estimate of the mean density of a bacterial population by the dilution method but obtains also some measure of the reliability of this estimate by appeal to Bayes' Theorem. He gives a method of obtaining an a posteriori expectation of  $\log \rho$  and of its standard deviation, assuming such a distribution to be approximately normal. In theoretical contrast with this inverse method (but perhaps in substantial numerical agreement in given applications) is the direct method of determining a fiducial or confidence interval. The work of other investigators on essentially the same problem and analogous problems is cited. A discussion of the two methods brings out the fact that work particularly of Halvorson and Ziegler and of Matsuzewski et al. provides a rapid method of obtaining in many cases a provisional working solution, which while using a partly empirical basis, avoids the extensive computation as yet required by Gordon's plan of attack. If tables of  $\bar{e}$  and  $e$  for Gordon's plan are later computed a comparison of numerical results would be in order, and if agreement is found, this would "undoubtedly widen the range of persons who could use his tables with confidence".

Albert A. Bennett (Providence).

**Salvemini, Tommaso: L'indice di cograduazione del Gini nel caso di serie statistiche con ripetizioni.** Metron 13, Nr 4, 27—39 (1939).

Bekanntlich ist, wenn zwei statistische Reimen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bezüglich des Merkmals  $A$  und  $y_1, y_2, \dots, y_n$  bezüglich des Merkmals  $B$  vorliegen und  $x_i$  und  $y_i$  entsprechende Elemente sind, der Ginische Kograduationsindex durch den Ausdruck

$$J = \frac{\sum_{i=1}^n |r_i - s'_i| - \sum_{i=1}^n |r_i - s_i|}{K}$$

definiert, wobei  $r_i$  und  $s_i$  den Rang angeben, welchen  $x_i$  bzw.  $y_i$  in der nach wachsender Größe geordneten Wertefolge der  $x_i$  bzw. der  $y_i$  einnehmen,  $s'_i$  den Rang, den  $y_i$  in der nach abnehmender Größe angeordneten Wertefolge der  $y_i$  einnimmt, und  $K = \frac{n^2}{2}$  für gerades  $n$ ,  $K = \frac{n^2 - 1}{2}$

für ungerades  $n$  ist. In dieser Arbeit gibt Salvemini eine geometrische Deutung dieses Index und benutzt sie zur Darlegung eines für den Fall, in dem mehrere Glieder denselben Wert haben, anzuwendenden Verfahrens (in diesem Fall weiß man offenbar nicht, welcher Rang den gleichen Gliedern in der Rangordnung anzuweisen ist), und zwar besteht Salveminis Verfahren darin, jedem der Glieder als Rang das arithmetische Mittel derjenigen aufeinander folgenden ganzen Zahlen zu erteilen, die diesen untereinander gleichen Gliedern zukommen würden, wenn sie, statt gleich zu sein, sich um solche Größen voneinander unterscheiden, daß zwischen die kleinste und die größte von ihnen keine anderen Glieder der Reihe fielen. Darauf untersucht Verf. den Fall gewogener Reihen mit Wiederholung und führt zahlreiche Anwendungen durch. *E. Pizzetti* (Rom).

**Gini, Corrado: Sulla determinazione dell'indice di cograduazione.** *Metron* 13, Nr 4, 41—48 (1939).

An die im vorsteh. Ref. besprochene Arbeit Salveminis schließt sich eng die vorliegende, in der Veröffentlichung auf sie folgende Arbeit an, da sie dieselbe Frage behandelt. Gini bemerkt, daß die Schwierigkeit, die Salvemini beheben will, sich in gewissen Fällen überwinden läßt, indem man von den Zahlen eine bessere Annäherung fordert, oder, wenn das nicht möglich ist, zu anderen Verfahren greift: u. a. kann es ratsam sein, einen geeigneten Mittelwert der beiden Kograduationsindizes zu berechnen, die man erhielte, wenn die gleichen Glieder voneinander im Sinne der größten Kograduation oder der größten Kontragraduation abwichen. Zahlreiche Beispiele erläutern die Ergebnisse, die man mit den verschiedenen Verfahren erhält, und führen zur Schlußfolgerung, daß es in der Praxis von Vorteil ist, die Werte der Kograduationsindizes auf Grund mehrerer verschiedener Methoden zu berechnen. *E. Pizzetti*.

### **Biomathematik, Finanz- und Versicherungsmathematik:**

**Feller, Willy: On the logistic law of growth and its empirical verifications in biology.** *Acta biotheor.*, Leiden 5, 51—65 (1940).

Der Wachstumskoeffizient einer Bevölkerung erfährt in dem Maße eine Verminderung, als die Bevölkerung ihren Lebensraum erfüllt. Nimmt man daher an, daß der Wachstumskoeffizient eine lineare Funktion der Zeit  $t$  sei, die mit wachsendem  $t$  abnimmt, so genügt die zur Zeit  $t$  gültige Bevölkerungszahl  $y(t)$  einer Differentialgleichung von der Form  $\frac{dy}{dt} = \beta y \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ) mit der Lösung  $y = \frac{\alpha}{1 + e^{-\beta(t-m)}}$  (logistische Kurve). An die Stelle einer Bevölkerung kann auch ein Einzelwesen (z. B. als Gesamtheit von Zellen) treten. Das Wachstum einer Sonnenblume genügt z. B. näherungsweise diesem Entwicklungsgesetz. — Verf. prüft nun, welche Güte der Annäherung an ein empirisches Material im Durchschnitt zu erwarten ist, wenn die Schar der logistischen Kurven durch beliebige andere dreiparametrische Scharen S-förmiger Kurven ersetzt wird. Insbesondere wird an verschiedenen biologischen Beispielen gezeigt, daß durch Kurven von der Form  $y = \frac{2a}{\pi} \arctg 10^{b(t-c)}$  oder  $y = \frac{a}{2} [1 + \Phi(b(t-c))]$  mit  $\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$  eine bessere Übereinstimmung mit der Wirk-

lichkeit erzielt werden kann, als sie die logistische Kurve liefert. Verf. schließt daraus, daß die betrachteten Verteilungen auch auf Grund anderer Hypothesen erklärt werden können. *F. Ringleb* (Augsburg).

**Dawson, W. M., and W. Edwards Deming: On a problem of natural increase.** *Growth* 2, 319—326 (1938).

**Hadwiger, H., und W. Rucht: Über eine spezielle Klasse analytischer Geburtenfunktionen.** *Metron* 13, Nr 4, 17—26 (1939).

Die Verf. gehen von der schon von A. J. Lotka und A. Linder studierten Integralgleichung

$$G(t) = \int_0^{\infty} G(t - \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

aus, in der  $G(t)$  die Zahl der lebendgeborenen Mädchen einer Bevölkerung im Zeitpunkt  $t$  bedeutet und in dem Kern  $\varphi(\xi) = f(\xi) p(\xi)$  die Funktion  $f(\xi)$  die Zahl der lebendgeborenen Töchter einer Frau vom Alter  $\xi$ , und  $p(\xi)$  die Wahrscheinlichkeit bedeuten, daß eine Neugeborene das Alter  $\xi$  erreicht. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall  $\varphi(\xi) = A \xi^n e^{-c\xi}$  untersucht, die entsprechende Integralgleichung gelöst und die Lösung an Hand der drei auftretenden Fälle diskutiert. Eine praktische Anwendung erfolgt auf die Schweizer Bevölkerung der Jahre 1932—1935. Nach Bestimmung der Funktion  $G(t)$  prüfen die Verff. insbesondere, nach wieviel Jahren gemäß dem zugrunde gelegten Gesetz für den Kern die Geburtenziffer auf die Hälfte der zu Beginn der Periode geltenden Ziffer herabgesunken sein wird; für die Schweizer Bevölkerung ergibt sich 106,6 Jahre. *T. Salvemini* (Roma).



**Gini, Corrado:** Ressemblance parentale et ressemblance fraterne. *Metron* 13, Nr 4, 59—74 (1939).

Verf. betrachtet ein einortiges Erbmerkmal ohne Auslese; herrscht vollständige Durchmischung, so ist die erwartungsmäßige Häufigkeit  $D_f$  eines Merkmalunterschiedes zwischen Geschwistern stets kleiner als die Häufigkeit  $D_p$  eines Unterschiedes zwischen Eltern und Kindern, wobei  $\Delta = D_p - D_f$  von dem Grade der Dominanz des einen Gens über das andere unabhängig ist. Ist die Durchmischung gestört, so wächst  $\Delta$  mit zunehmender Häufigkeit der Ehen  $aa \times AA$  und abnehmender Häufigkeit der  $aA \times aA$ -Verbindungen und bleibt wieder vom Dominanzgrad unabhängig;  $\Delta$  wird nur dann zu Null, wenn das Verhältnis der Häufigkeiten von  $aA \times aA$ -Eltern und  $aa \times AA$ -Paaren doppelt so groß ist wie im Falle der vollständigen Durchmischung. Anders verhält sich hingegen der Korrelationskoeffizient  $c_f$  zwischen Geschwistern und derjenige  $c_p$  zwischen Eltern und Kindern; bei vollständiger Durchmischung ist  $c_f = c_p = \frac{1}{2}$  im intermediären Falle, hingegen bei Dominanz  $c_f > c_p$ . *Harald Geppert.*

● **Cantelli, Francesco P.:** Lezioni di matematica attuariale, raccolte da Ignazio Messina. Anno accad. 1938—39. Roma: V. Ferri 1939. 111 pag.

**Steller, E. T.:** Kritische Betrachtungen über einige Kapitel aus der Versicherungsmathematik. *Verzekerings-Arch.* 20, 101—130 (1939) [Holländisch].

In Fortsetzung früher unter gleichem Titel (dies. Zbl. 21, 148) behandelter Fragen werden jetzt in Kap. IV die angenäherte Berechnung von Leibrenten und in Kap. V Sterbetafelberechnungen erörtert. Von den zwei Forderungen, die an eine angenäherte Berechnung gestellt werden, brauchbares Ergebnis und nicht zu große Rechenarbeit, haben nach dem Verf. die meisten bisher veröffentlichten Verfahren zu viel Gewicht auf die erste gelegt und sind dadurch in den Fehler der eingebildeten Genauigkeit verfallen. Verf. sagt sogar „onredelijk“. Indem er seine Untersuchung mit der Frage beginnt, wieweit man beim Barwert der Leibrente 3 Dezimalen verbürgen kann, scheint ihm entgegen zu sein, daß schon Friedli, fußend auf Kleins Unterscheidung von Präzisions- und Approximationsmathematik, darüber eine Untersuchung angestellt hat [Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 1924, H. 18; vgl. auch meinen Nachruf auf Friedli, Bl. Versich.-Math. 4, 70—74 (1937)]. Verf. gibt eine kritische Übersicht über die Verfahren von Steffensen, Palmquist und Poukka (Skand. Aktuarie Tidsskr. 1918, 82—97; 1921, 152—178; 1923, 137—152), wobei sich seine Kritik besonders auf eine ähnliche Übersicht von Christen (Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 1931, H. 25) bezieht. Es wird dann der Ersatz einer Leibrente durch eine Zeitrente von mittlerer Verfallzeit  $t_x$  auf Grund der Gleichung  $a_x = e_x v^{t_x}$  behandelt. Für den Übergang zu einem anderen Zinsfuß  $i' = i + h$  erscheint die von Steffensen stammende Formel  $a'_x = a_x - h \cdot v \frac{S_{x+1}}{D_x}$  am brauchbarsten. Verf. bringt aber noch eine erhebliche Verminderung der Rechenarbeit. — In Kap. V erörtert er außer einigen älteren holländischen Verfahren zur Berechnung von  $q_x$  das 1938 in der gleichen Zeitschrift von ten Pas [Verzekerings-Arch. 19, 33—51 (1938)] veröffentlichte Verfahren. Ist  $q_x^i$  die aus dem  $i$ -ten Beobachtungsjahr gewonnene Sterbehäufigkeit, so werden mit dem Verfahren der kleinsten Quadrate und dem Ansatz  $k_x^i = e_x i + b_x$  die Konstanten  $a_x$  und  $b_x$  bestimmt aus  $\sum_{i=1}^n (k_x^i - q_x^i)^2 = \text{Minimum}$ . Verf. hält aber den Ansatz  $k_x^i = a_x + \frac{b_x}{i}$  für besser, was er an dem statistischen Material der Jahre 1910—1930 mit und ohne Berücksichtigung des Grippejahres 1918 begründet. *Lorey (Frankfurt a. M.).*

**Komischke, A.:** Tarifstatistik als Element der Tarifbildung, erläutert an einem Gerichtsgebührentarif. *Metron* 13, Nr 4, 135—154 (1939).

Verf. stellt dem durch das Reichskostengesetz vom 1. April 1936 festgelegten Gebührentarif für die Berufungsgerichtsbarkeit zwei Optimaltarife gegenüber. Der erste Optimaltarif gründet sich auf das Prinzip der möglichen Steigerung der nach der Gewinnfähigkeit gewogenen durchschnittlichen Prozeßhäufigkeit, der zweite auf das Prinzip der größtmöglichen Hebung des nach der Gewinnfähigkeit gewogenen durchschnittlich benutzten Streitwerts. Die in den beiden Optimalproblemen auftretenden, als Polynome zweiten Grades angesetzten Gewinnfunktionen werden nach der Tchebycheffschen Methode der Variationsrechnung bestimmt, indem als Prozeßhäufigkeiten die nach dem Pearsonschen Verfahren ausgeglichenen statistischen Werte Verwendung finden. Der nach dem ersten Prinzip erhaltene Optimaltarif weist keine allzu großen Differenzen mit dem behördlich benutzten Tarif auf, dessen Verlauf im ersten Teil proportional und im weiteren degressiv ist, während der nach dem zweiten Prinzip bestimmte Optimaltarif einen Übergang von der Degression zur Progression aufweist, so daß er zum Vergleich mit dem gesetzlichen Tarif ungeeignet ist. Durch tarifanalytische

Vergleichung der Werte der erzeugenden Funktion, die durch Interpolation aus Werten des gesetzlichen Gebührentarifs berechnet wird, mit den Werten des ersten Optimaltarifs ergibt sich, daß bei mittleren Streitwerten der gesetzliche Tarif unter dem optimalen liegt, d. h. daß eine Tarifvergünstigung vorhanden ist. Bei geringen und hohen Streitwerten liegt die entgegengesetzte Beziehung vor. *F. Burkhardt (Leipzig).*

## Numerische und graphische Methoden.

● **Jordan, Wilhelm:** *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (zentesimale) Teilung mit sechs Dezimalstellen.* Hrsg. v. Otto Eggert. 5., verb. Aufl. Stuttgart: Wittwer 1939. VIII, 424 S. RM. 12.—.

**Badellino, Maria:** *Sul calcolo delle funzioni di Bessel.* Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 271—279 (1939).

Tabellen der Funktionen  $J_\nu(x)$  und  $K_\nu(x)$  für die Parameter  $\nu = 0$  und  $\nu = 1$  und die ganzzahligen Argumente  $x = 20$  bis  $x = 50$ . Die Funktionswerte werden aus asymptotischen Reihen berechnet, wobei für das Restglied eine neue Abschätzung gegeben wird. Die berechneten Funktionen werden bei der Ermittlung der Biegemomente durchlaufender Träger von veränderlicher Höhe angewandt. *Gran Olsson.*

**Bertschmann, S.:** *Besondere Formeln für das Maschinenrechnen. Einfacher Vorwärts- und Rückwärtseinschnitt, Schnittpunkt zweier Geraden.* Schweiz. Z. Vermessgswes. 38, 62—68 (1940).

Die Ermittlung der rechtwinkligen Koordinaten eines durch Vorwärts- bzw. Rückwärtseinschnitt bestimmten Punktes sowie des Schnittpunktes zweier durch je 2 Punkte festgelegten Geraden wird für Rechnung auf einer (Einzel-)Rechenmaschine zurechtgelegt. Für den Rechnungsgang wird eine tabellarische Übersicht gegeben. Zahlenbeispiele. *Theodor Zech (Darmstadt).*

**Senft, K.:** *Schnittpunkt zweier Geraden.* Schweiz. Z. Vermessgswes. 38, 68—74 (1940).

Für ein von S. Bertschmann (vgl. dies. Zbl. 22, 257) veröffentlichtes Verfahren zur Ermittlung der rechtwinkligen Koordinaten für den Schnittpunkt zweier Geraden wird ein Formular vorgeschlagen, das auch Kontrollen berücksichtigt. Anwendungsbeispiele. *Theodor Zech (Darmstadt).*

**Pinkwart:** *Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte.* Z. Vermessungswes., Stuttg. 69, 161—172 (1940).

Sind die rechtwinkligen Koordinaten mehrerer auf einer Geraden liegenden Punkte gemessen, so können die Meßfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate in der Weise ausgeglichen werden, daß man zwecks Gewinnung linearer Fehlergleichungen eine Näherungsgerade einführt. Das Endergebnis ist von der Wahl der Geraden unabhängig, wie O. Eggert [Z. Vermessgswes. 47, 1—16 (1918)] zeigte. Ergänzend weist Verf. darauf hin, daß dieses Ergebnis davon abhängt, in welcher Weise man den Punkten, deren Koordinaten gemessen sind, Näherungspunkte auf der Näherungsgeraden zuordnet. Man gelangt z. B. zu verschiedenen Endwerten, wenn man den Näherungspunkten einmal die Abszissen der Meßpunkte und ein andermal die Ordinaten der Meßpunkte gibt. Die Zuordnung und das Endergebnis werden indessen eindeutig, wenn man die Näherungspunkte so wählt, daß sie jeweils auf den Senkrechten liegen, die von den gemessenen Punkten zur ausgeglichenen Geraden gezogen werden. Praktisch kann man für diesen Zweck statt dieser Geraden die Näherungsgerade verwenden. Als Anwendung wird das deutsch-dänische Nivellement über den Fehmarn-Belt neu berechnet. *H. Schmehl (Potsdam).*

**Masuyama, Motosaburo:** *On the numerical method of solution of the characteristic equations.* Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 100—108 (1939).

Hauptsächlich im Anschluß an eine Methode von Kryloff (dies. Zbl. 2, 291) wird die numerische Auflösung von Gleichungen in Determinantenform besprochen. *Nyström (Helsinki).*



**Steuermann, E.:** Application des méthodes d'approximation des fonctions dans la mécanique des constructions et dans la physique mathématique. Rec. Trav. Inst. Math. Nr 3, 77—110 u. franz. Zusammenfassung 111—112 (1940) [Russisch].

Für eine Reihe von Approximationsmethoden werden physikalische Deutungen gegeben; z. B. entspricht die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate statischen Aufgaben mit Berücksichtigung elastischer Verformungen, die Methode kleinsten Abweichungsbetrages berücksichtigt plastische Verformungen, die Lagrangesche Interpolationsformel entspricht dem Vorkommen von Gelenken usw. Die Tschebyscheffsche Theorie der Polynome kleinster Nullabweichung findet hier eine physikalische Deutung. Verallgemeinerungen werden als wünschenswert bezeichnet.

*Theodor Zech* (Darmstadt).

**Grammel, R.:** Ein Gegenstück zum Meissnerschen Verfahren der graphischen Analysis. Ing.-Arch. 10, 395—411 (1939).

Verf. wählt für eine reelle Funktion  $p(\vartheta)$  folgende graphische Darstellung: Man habe in der Ebene einen festen Pol  $O$  und eine von ihm ausgehende feste Polachse  $g$ . Dem Funktionselement  $(p, \vartheta)$  wird dann in der Ebene der Punkt  $P$  zugeordnet mit den Polarkoordinaten  $\frac{1}{p}$  (Abstand von  $O$ ) und  $\vartheta$  (Winkel gegen  $g$ ), falls  $p(\vartheta) > 0$ , bzw.  $\frac{1}{|p|}$  und  $\vartheta + \pi$ , falls  $p(\vartheta) < 0$  ist. Die so gewonnene Darstellung einer Funktion  $p(\vartheta)$  heißt das Polarbild der Funktion. Ist  $p(\vartheta)$  eine stetig differenzierbare Funktion, so ist das Polarbild eine Kurve  $C$  mit stetiger Tangente. Man erhält in diesem Fall das Polarbild der Ableitung  $p'(\vartheta)$ , indem man die Orthopolare zu  $C$  konstruiert, d. h.: Ist  $P$  der Bildpunkt des Funktionswertes  $p(\vartheta)$ , so wird der Punkt, der auf der Tangente in  $P$  an  $C$  liegt und das Winkelargument  $\vartheta + \frac{\pi}{2}$  (bzw.  $\vartheta + \frac{3}{2}\pi$ ) hat, der Bildpunkt von  $p'(\vartheta)$ . Besitzt die Kurve im Punkt  $P$  einen Knick, so ist das Orthopolarenbild von  $P$  diejenige Strecke, die durch die beiden Knicktangenten von  $C$  in  $P$  auf der Geraden durch  $O$  mit dem Winkelargument  $\vartheta + \frac{\pi}{2}$  ausgeschnitten wird. Durch Wiederholung der Orthopolarenbildung sind die Bilder der höheren Ableitungen zu gewinnen. — Die graphische Differentiation und Integration einer Funktion läuft bei Benutzung dieser Begriffsbildungen darauf hinaus, von einem Polarbild zur Orthopolaren bzw. von der Orthopolaren zum Polarbild überzugehen. Durch den Umstand, daß die Unendlichkeitsstellen der Funktion  $p(\vartheta)$  in den Punkt  $O$  fallen, ist insbesondere auch die rein graphische Auswertung uneigentlicher Integrale möglich. Den Nullstellen der Funktion entsprechen die Asymptoten des Polarbildes, mit denen man im allgemeinen graphisch ohne Schwierigkeit operieren kann. Sonst hat man auch die Möglichkeit, durch Hinzufügen einer additiven Konstanten einen zu untersuchenden Bereich nullstellenfrei zu machen. — Besonders geeignet scheint das Verfahren des Verf. zur Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systemen solcher zu sein. Als Beispiele werden behandelt: die Hängekurve eines Kabels,  $2p''(\vartheta) = 1 + \sqrt{1 + p'^2(\vartheta)}$ , eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit zweiseitigen Randbedingungen, wie sie bei der Biegung rotierender Dampfturbinenscheiben unter dem Einfluß von Axialkräften und Randmomenten auftritt, die allgemeine Lösung des Problems der biegesteifen rotationssymmetrisch gestalteten und belasteten Schale, wozu zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung zu untersuchen sind, von denen Verf. die Integration der einen unter Zurückführung auf ein gekoppeltes System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchführt, und als ein weiteres gekoppeltes System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Ermittlung der Bahn und Geschwindigkeit eines Geschosses. — Das Verfahren des Verf. ist in gewissem Sinne das duale Gegenstück zu dem Verfahren von E. Meissner, s. dies. Zbl. 6, 123.

*Werner Schulz* (Berlin-Adlershof).

**Myers, D. M.: An integrator for the solution of differential equations of the second order.** J. sci. Instrum. 16, 209—222 (1939).

Das beschriebene Instrument ist eine Verallgemeinerung des bekannten Integrators von Abdank-Abakanowitz, es arbeitet ebenso wie dieses mit scharfkantiger Integrierrolle und gibt im Falle einer einfachen Integration die gleiche (ziemlich große) Genauigkeit. Allgemein vermag es die Lösungen der Gleichung  $ay'' + by' + cy + d = 0$  aufzuzeichnen, wobei  $b$  und  $c$  Konstante sind,  $a$  und  $d$  aber Funktionen einer der Veränderlichen  $x, y, y'$  sein können. Bemerkenswert sind die beim Instrument arbeitenden Gelenkwerke. Der Fall, daß nur  $d$  veränderlich, und zwar eine Funktion von  $x$  ist, erweist sich als einfach. Ist auch  $a$  veränderlich oder hängt  $d$  von einer anderen Variablen als  $x$  ab, so treten gewisse Zusatzgeräte in Funktion. Sind sowohl  $a$  wie  $d$  variabel, so muß das Instrument im allgemeinen von zwei Personen bedient werden. Der eine Fahrstift wird auf elektrischem Wege geführt.

*Nyström (Helsinki).*

**Brown, S. Leroy: A mechanical harmonic synthesizer-analyzer.** J. Franklin Inst. 228, 675—694 (1939).

Beschreibung eines mit 30 Elementen ausgeführten Analysators höchster Genauigkeit. Ausgehend von diesem Gerät werden Verfahren und Formeln aufgezeigt, um auch eine größere Zahl harmonischer Elemente zu ermitteln.

*J. Sutor*

## Geometrie.

### Grundlagenfragen, Nichteuclidische Geometrie:

**Nagel, Ernest: The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry.** Osiris 7, 142—224 (1939).

Die Geschichte der Geometrie hat von der Ansicht, daß Geometrie die apodiktische Wissenschaft vom Raume ist, zu der Auffassung geführt, daß sie ein System von Verabredungen und Definitionen darstellt, geeignet, Körper zu ordnen und zu messen. Verf. gibt eine geschichtliche Darstellung der projektiven Geometrie unter Hervorhebung dieses Gesichtspunktes. Es wird gezeigt, wie die Behauptung, Geometrie sei die Wissenschaft von den quantitativen Beziehungen zwischen Ausdehnungsgrößen durch die Entdeckung der in der projektiven Geometrie vorherrschenden Lageverhältnisse widerlegt wird (Desargues, Poncelet, Gergonne). Zu ihrer Widerlegung trägt weiter die Einführung nicht unmittelbar anschaulicher Begriffe (uneigentlicher, imaginärer Punkt; Monge, Poncelet) bei. Indem Poncelet der Ursache nachforschte, warum algebraische Hilfsmittel oft beweiskräftiger sind als geometrische, kam er, wenn auch nicht bewußt, zu der Auffassung, daß ein geometrisches Diagramm ein abstraktes Zeichen sei, das wie ein algebraisches Zeichen gewissen Rechenregeln unterworfen ist. Seine Entwicklungen verstärken die Gründe dafür, daß Geometrie nichts mit räumlichen Beziehungen zu tun hat. Von Gergonne stammt der Ansatz für die Entdeckung des Begriffes „implizite Definition“. Grassmann war einer der ersten Mathematiker, die ausdrücklich feststellten, daß die Mathematik eine Wissenschaft von ausschließlich formaler Struktur ist. Durch seine Einführung der imaginären Elemente zeigte v. Staudt, daß es in der Geometrie nicht darauf ankommt, was man sich unter einem Punkt vorstellt, sondern darauf, welchen Beziehungen das Punkt genannte Element genügt. Daß die Geometrie weder die Lehre von den Größenverhältnissen noch die Lehre vom Raum ist, folgt schon aus dem Bisherigen. Daß sich diese Erkenntnis trotzdem nicht gleich durchsetzte, hatte mancherlei Gründe. Einer der Gründe war der, daß zunächst der Punkt das einzige Raumelement war. Er verlor diese Sonderstellung des absolut einfachsten Elements durch die Entdeckung des Dualitätsprinzips. Der Prioritätsstreit zwischen seinen Entdeckern Gergonne und Poncelet wird vom Standpunkt des Verf. aus beleuchtet. „Gergonnes Prinzip liegt dem Wesen der Dinge näher“ (J. Steiner). Chasles bemerkt, daß man durch Transformationen an Stelle des Punktes andere Raumelemente einführen kann. Die zentrale logische Idee von Plücker besteht darin, daß ein mathematischer Beweis nur von postulierten Beziehungen zwischen abstrakten Zeichen handelt, die unabhängig davon sind, welche anschauliche Interpretation man ihnen gibt. Auf diesen Erkenntnissen bauen sich die neueren Entwicklungen auf, die durch die Namen Pasch, Hilbert, Klein und durch das Auftreten der Nichteuclidischen Geometrie gekennzeichnet sind. Nach Poincaré ist keine Geometrie wahrer als die andere, sie kann nur zweckmäßiger sein.

*E. A. Weiss (Bonn).*



**Gorn, Saul: On incidence geometry.** Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 158—167 (1940).

Auf der Grundlage dimensionstheoretischer Betrachtungen entwickelt Verf. ein Axiomensystem für drei- und höherdimensionale Inzidenzgeometrien. Aus diesen Verknüpfungsaxiomen, denen das Archimedische Axiom als Stetigkeitsaxiom in inzidenzmäßiger Form angefügt ist, werden die unmittelbar folgenden Inzidenzbeziehungen hergeleitet und eine Art „Streckenrechnung“ eingeführt, wodurch die durch das Axiomensystem definierten Inzidenzgeometrien algebraisiert werden. Die Beziehungen dieses Axiomensystems zum Mengerschen (Ann. of Math. (2) **37**, **38**; dies. Zbl. **14**, 76; **16**, 268) und zu den ähnlichen Untersuchungen von Birkhoff und von Neumann werden herausgestellt und sodann die allgemeinen Sätze der Inzidenzgeometrien bewiesen. — Im 3. Abschnitt folgt ein Vergleich mit den Hilbertschen Verknüpfungsaxiomen für den  $R_3$ ; es werden Äquivalenzbetrachtungen angestellt und der Desarguessche Satz in der neuen axiomatischen Theorie formuliert und bewiesen, wodurch die Tragweite der Inzidenzgeometrien des Verf. und seiner Methoden an dem einen grundlegenden Satz erprobt wird. Der anschaulich-geometrische Inhalt der Inzidenzgeometrien ist dabei in einen reinen Formalismus übergeführt, dem eine anschaulich geometrische Deutung wohl nur sehr schwer zu unterlegen sein wird. Steck (München).

**Glagoleff, Nil: Sur les axiomes d'appartenance de la géométrie euclidienne.** Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 221—225 (1939).

Während in den Hilbertschen Verknüpfungsaxiomen nur die Inzidenz zwischen Punkt und Gerade und die Inzidenz zwischen Punkt und Ebene als Grundbegriffe auftreten, verwendet der Verf. auch noch die Inzidenz zwischen Gerade und Ebene als Grundbegriff. Sein System von Verknüpfungsaxiomen enthält als „axiomes de la connexion“ die Aussagen, daß die Inzidenz eine symmetrische Beziehung ist und daß der Punkt  $A$  mit der Ebene  $\alpha$  inzidiert, wenn  $A$  mit der Geraden  $g$  und  $g$  mit  $\alpha$  inzidiert, und ferner fünf voneinander unabhängige „axiomes de l'appartenance“, unter denen das Parallelenaxiom auftritt; es ist vermieden, die Aussage, daß auf einer Geraden Punkte existieren, unter die Axiome aufzunehmen. Bachmann (Marburg a. d. L.).

**Bachmann, Friedrich: Stufen der absoluten Geometrie. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Anordnung.** Math. Ann. **117**, 197—234 (1940).

Diese Arbeit schließt an eine Begründung der ebenen absoluten Geometrie an, in der keine Anordnungsbegriffe auftraten (Bachmann, dies. Zbl. **15**, 36; Bachmann und Reidemeister, dies. Zbl. **15**, 312). Es wird jetzt die Frage entschieden, ob eine solche Geometrie notwendig anordenbar ist oder ob die Anordnungsaxiome von den Axiomen der absoluten Geometrie unabhängig sind. Verf. beschränkt sich auf den Fall, daß noch ein neues Axiom gilt, das (für die ordinär absolute oder nichteuklidische Geometrie) folgendermaßen lautet: Wenn zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen, so haben sie entweder ein gemeinsames Lot, oder sie sind zueinander nichteuklidisch parallel. Eine absolute Geometrie, die dieses Axiom erfüllt, heißt von erster Stufe. Durch Hinzunahme weiterer Kongruenzaxiome werden höhere Stufen definiert. Für die erste Stufe gilt: es gibt sowohl anordenbare als nichtanordenbare euklidische Geometrien; eine hyperbolische Geometrie existiert genau in den reellen Körpern und ist stets eindeutig anordenbar; die elliptischen Geometrien sind nicht immer anordenbar. Das Axiom der Streckenübertragbarkeit hat zur Folge, daß die Geometrien stets anordenbar sind; es gibt allerdings im euklidischen Falle noch wesentlich verschiedene Anordnungen. Wenn aber zudem das Axiom gilt, daß ein rechtwinkliges Dreieck existiert, von dem die Hypotenuse und eine Kathete vorgegeben sind, so ist auch diese letzte Geometrie stets eindeutig anordenbar. Bei den Beweisen wird die Cayleysche Geometrie betrachtet, in welcher die absolute Geometrie als Eigentlichkeitsgebiet enthalten ist, und werden die algebraischen Äquivalente der Geometrien der verschiedenen Stufen untersucht. — Zum Schluß wird das Mittelpunktsaxiom und die Hjelmslevsche Begründung der absoluten Geometrie betrachtet: es gibt sowohl

im singulär als im ordinär absoluten Falle nichtanordenbare Geometrien, die das Hjelmslevsche Axiomensystem erfüllen. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

**Steck, Max:** Das schwache E.P.-Axiom und die Beweise der Anordnungsaxiome. *Math. Ann.* **117**, 195—196 (1940).

In dem Liebmann-Steckschen Axiomensystem der projektiven Geometrie werden die Anordnungsätze mittels des E.P.-Axioms bewiesen. Es wird jetzt gezeigt, daß man die Hilbertschen Anordnungsaxiome II, 1 bis II, 3 mit Hilfe des „schwachen E.P.-Axioms“ beweisen kann, welches folgendermaßen formuliert wird: Außer parabolischen und hyperbolischen Punkten gibt es in bezug auf jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt noch mindestens einen elliptischen Punkt. *O. Bottema* (Deventer).

**Sagastume Berra, A. E.:** Die Doppelverhältnisse in der abstrakten Geometrie und die verschiedenen Definitionen der Projektivität zwischen Gebieten erster Stufe. *Contrib. estud. ci. fís. mat.* **1**, 435—443 (1938) [Spanisch].

Axiomatische Begründung der projektiven Geometrie der Ebene. Nach Aufstellung von drei Inzidenzpostulaten werden zwei Würfe  $C$ - (Cremona)- projektiv genannt, wenn sie durch die Aufeinanderfolge einer endlichen Anzahl projektiver Operationen (Projizieren und Schneiden) ineinander übergeführt werden können. Dann folgt das 4. Postulat: Sind zwei auf einer Geraden gelegene Punktquadrupel  $C$ -projektiv  $\left(\frac{\bar{A}}{C}\right)$  und fallen drei Paare zugeordneter Punkte zusammen, so fallen auch die Punkte des vierten Paares zusammen. Dann gelingen die Beweise der Sätze von Pappus und Desargues. Die Beziehung  $\frac{\bar{A}}{C}$  gestattet eine Klasseneinteilung im Bereiche der geordneten Punktquadrupel. Die Klasse, zu der ein Punktquadrupel  $A, B, C, D$  gehört, wird Doppelverhältnis  $(ABCD)$  genannt. Summe und Produkt der Doppelverhältnisse  $(ABCX)$  und  $(ABCY)$  werden definiert und zu einem Punkte wird der konjugiert-komplexe Punkt eingeführt. Es wird gezeigt, daß die Doppelverhältnisse einen Körper bilden. — Umgekehrt kann man von einem Körper ausgehen, projektive Punkt- und Geradenkoordinaten definieren und zeigen, daß die entstehende Geometrie den vier aufgestellten Postulaten genügt. — An Stelle der  $C$ -Projektivität können auch andere Definitionen der Projektivität zugrunde gelegt werden. Besteht eine eindeutige Beziehung zwischen zwei Gebieten 1. Stufe derart, daß sich die Doppelverhältnisse ihrer Elemente entsprechen, so heißen die Gebiete  $S$ - (Steiner-) projektiv, wird nur das Entsprechen harmonischer Quadrupel verlangt, so heißen sie v. S.- (v. Staudt-) projektiv. Der Verf. untersucht zum Schluß die Beziehungen zwischen diesen drei Arten von Definitionen der Projektivität. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Neumann, J. v., and I. Halperin:** On the transitivity of perspective mappings. *Ann. of Math.*, II. s. **41**, 87—93 (1940).

Es wird ein einfacher Beweis für die Transitivität der Perspektivität in einer kontinuierlichen Geometrie gegeben. Es wird bewiesen, daß in jedem komplementären modularen Verband, in dem beliebige Vereinigungen  $\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha$  stets existieren und

$$c \cdot \sum a_\alpha = \sum c \cdot a_\alpha \text{ gilt, aus } a_1 \sim a_2, \dots, a_n \sim a_{n+1}, a_1 a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i, \text{ stets } a_1 \sim a_{n+1}$$

folgt ( $\sim$  bedeutet perspektiv). Daraus folgt dann nach v. Neumann (Continuous Geometry, Vorlesungsausarbeitung Princeton 1936—1938) die Transitivität im allgemeinen Fall. *G. Köthe* (Münster).

**Reidemeister, Kurt:** Die Transitivität der Winkelkongruenz. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **49**, Abt. 2, 74—75 (1940).

Verf. gibt einen neuen, einfachen Beweis für das fünfte Hilbertsche Kongruenzaxiom, die Transitivität der Winkelkongruenz. Seine Beweisaneinanderordnung vermeidet den früher in diesem Zusammenhang [bei Rosenthal, *Math. Ann.* **71**, 257 (1912)] gebrauchten dritten Kongruenzsatz für Dreiecke, an dessen Stelle hier der Nachweis tritt, daß alle rechten Winkel kongruent sind. *M. Steck* (München).



**Bachmann, Friedrich:** Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie. J. reine angew. Math. 181. 242—252 (1940).

Die Übertragung des Begriffes einer Cayleyschen Geometrie und ihrer Bewegungen auf eine absolute quadratische Form mit Koeffizienten in einem Körper  $K$  (der Charakteristik  $p \neq 2$ , sonst beliebig) folgt nicht ohne weiteres und braucht manche Erklärungen. Man beweist zuerst, daß die hyperbolischen ebenen Geometrien über  $K$  eine einzige Klasse darstellen, während sich die elliptischen Geometrien in mehrere Klassen einteilen lassen, die durch die Signaturen  $\{a_1, a_2\}$  zu bezeichnen sind. Hier sind  $a_1, a_2$  entweder gleich 1 oder nicht quadratische, von Null verschiedene Zahlen in  $K$ . — Die elliptischen Geometrien bilden eine Klasse von isomorphen Individuen, sind also in abstracto identisch, wenn die zugehörigen Signaturen durch einen Automorphismus des Körpers ineinander übergehen. — Jeder dieser ebenen Cayleyschen Geometrien wird eine Klasse von isomorphen Quaternionensystemen über  $K$  eineindeutig zugeordnet. Ist  $Q_0(\xi, \xi) = a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2$  die normierte Diagonalgestalt der der Geometrie zugrunde liegenden absoluten Form, so lautet das in Frage stehende Quaternionensystem

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2, \quad i_1^2 = -a_1, \quad i_2^2 = -a_2, \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1.$$

Abgesehen von dem hyperbolischen Fall  $\{1, -1\}$  bilden diese verallgemeinerten Quaternionen immer einen Schiefkörper. — Verf. zeigt, daß die Bewegungen jeder räumlichen Cayleyschen Normgeometrie (d. h. einer Geometrie, deren metrische Form eine quadratische Diskriminante besitzt und folglich auf die Diagonalgestalt  $\xi_0^2 + a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2$  gebracht werden kann) durch die quaternionische multiplikative Gruppe  $\varrho x^* = axb$  darzustellen sind ( $N(a)N(b) \neq 0, \varrho$  in  $K$ ) und umgekehrt. Daraus ergibt sich für die in der Ebene  $\xi_0 = 0$  induzierten Cayleyschen Bewegungen die Darstellung  $\varrho x^* = ax\bar{a}$ .

D. Barbilian (Bucureşti).

**Blaschke, Wilhelm, e Hans Terheggen:** Trigonometria hermitiana. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 153—161 (1939).

In der elliptischen Hermiteschen Ebene untersuchen Verff. Eigenschaften, die bezüglich der Gruppe  $G_8$  der Hermiteschen Bewegungen, die durch die Gleichungen

$$x'_i = \sum_{k=0}^2 a_{ik} x_k \quad \text{mit} \quad \sum_j a_{ji} \bar{a}_{jk} = \delta_{ik} \quad (\bar{a} \text{ konjugiert komplex zu } a) \text{ dargestellt werden,}$$

invariant sind. Nach Vorgabe von drei Punkten  $x, y, z$  und den Polen  $X, Y, Z$  der durch sie bestimmten Dreiecksseiten findet man, daß das Produkt der Sinus zweier Seiten mit dem Sinus der Seite, die ihre Pole verbindet, sich mit dem Seitenpaar nicht ändert (Sinussatz). Der Kosinus der Seite des Polardreiecks läßt sich mittels der Seiten des gegebenen Dreiecks und einer Invarianten  $\omega$ , die ebenfalls durch das Dreieck bestimmt wird, ausdrücken (Kosinussatz). Die Bedingung  $e^{i\omega} = 1$  ist notwendig und hinreichend dafür, daß das gegebene Dreieck in einer normalen Kette  $N_{II}$  (mit zwei reellen Dimensionen) enthalten sei. Schließlich werden weitere invariante Winkel angegeben, die sich durch die betrachteten Elemente ausdrücken lassen.

E. Bompiani (Rom).

### Elementargeometrie, Darstellende Geometrie:

**Cavallaro, M. Vincenzo G.:** Sur la géométrie du triangle. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 9, 7—16 (1939).

„Équimédianiques“ nennt Verf. Dreiecke, deren Seiten zu den Seitenhalbierenden eines geg.  $\triangle ABC$  senkrecht stehen in Punkten, die ein zu  $\triangle ABC$  ähnlich gelegenes Dreieck bilden. Er berechnet die Seiten und den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks und findet die ersten proportional zu den Seitenhalbierenden des geg. Dreiecks und den letzten prop. zu  $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\triangle ABC}$ . Da diese Größe in verschiedenen anderen Größen der Dreiecksgeometrie vorkommt, so ergeben sich weitere Zusammenhänge.

Fladt (Tübingen).



**Thébault, V.:** Rectangles semblables associés à un triangle. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, 60, 5—14 (1940).

Verf. beweist den Satz: „Zeichnet man über den Seiten eines  $\triangle ABC$  nach innen drei ähnliche Rechtecke  $BCA_1A_2$ ,  $CAB_1B_2$ ,  $ABC_1C_2$ , deren Diagonalen mit  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  einen Winkel bilden, dessen Tangens halb so groß wie der Tangens des Brocardschen Winkels ist, so treffen sich  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  im Lemoineschen Punkt des  $\triangle ABC$ “ und weitere Sätze über ähnliche nach außen oder innen errichtete oder dem  $\triangle ABC$  einbeschriebene Rechtecke. *Fladt* (Tübingen).

**Woude, W. van der:** Über das Dreieck von Morley und die Hypozykloide von Steiner-Schläfli. Mathematica, Zutphen B 8, 129—134 (1940) [Holländisch].

Verf. beweist den von Ph. Franklin [J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 6, 50—60 (1926)] angegebenen Satz: Jede der Tangenten in den drei Spitzen der Steinerschen Hypozykloide eines Dreiecks steht auf einer Seite des Morleydreiecks (d. h. des gleichseitigen Dreiecks aus den Schnittpunkten der den Seiten des Grunddreiecks anliegenden inneren Winkeldrittelnden) senkrecht. *Max Zacharias*.

**Rangaswami, K.:** The theory of the general contact circles of a triangle. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 254—261 (1939).

The common contact circle of a point  $P$  with respect to a triangle is the circle through the points of contact with the sides, of the unique inconic of the triangle whose centre is  $P$ . As two isogonal conjugated points have the same contact circle and these points are the singular members of a linear  $\infty^3$ -system of conic envelopes — called infocal conics — inpolar to the rectangular hyperbolas through the in- and ex-centres of the triangle, the author is able to give an extension of the notion of contact circle. He defines the contact circle of an infocal conic  $C$  as the harmonically conjugated conic of the reciprocal of  $C$  with respect to the Steiner inscribed ellipse of the triangle. Various properties of the general contact circle are given. We cite the following theorem: if an infocal conic passes through the symmedian point of the triangle, its contact circle touches the nine points circle. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

**Thébault, V.:** Géométrie du triangle et du tétraèdre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 59, 347—357 (1939).

1.  $M$  et  $M'$  sont deux points conjugués isogonaux par rapport au triangle  $ABC$ ;  $A_1B_1C_1$  et  $A'_1B'_1C'_1$  les triangles podaires de  $M$  et  $M'$  par rapport à  $ABC$ ;  $A_nB_nC_n$  et  $A'_nB'_nC'_n$  les triangles podaires de  $M$  et  $M'$  pour  $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$  et  $A'_{n-1}B'_{n-1}C'_{n-1}$ . Les triangles  $A_3B_3C_3$  et  $A'_3B'_3C'_3$  sont semblables à  $ABC$ ;  $A_nB_nC_n$  et  $A_{n+3}B_{n+3}C_{n+3}$  sont semblables. Relations concernant les rayons des cercles circonscrits et les aires des triangles podaires successifs de  $M$  et  $M'$ . Cas spécial:  $M$  et  $M'$  sont équidistants du centre du cercle circonscrit.  
2. Sphères associées au tétraèdre. Solution d'une question posée par Neuberg. *O. Bottema*.

**Chisini, O.:** Sul calcolo del volume del tetraedro. Period. Mat., IV. s. 20, 24—31 (1940).

Über verschiedene Methoden zur Inhaltsbestimmung eines Tetraeders. Der Verf. gibt eine kurze Ableitung der Formel  $V = \frac{1}{3}bh$ , indem er das Tetraeder in zwei Tetraeder und zwei Prismen zerteilt und den Satz vom Volumenverhältnis ähnlicher Tetraeder benutzt. *Bottema*.

**Thébault, V.:** Über einige einem Tetraeder assoziierte Kugeln. Gaz. mat. 45, 292—295 (1940) [Rumänisch].

Ein Vierflach  $ABCD$  habe die Kantenlängen  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $DA = a'$ ,  $DB = b'$ ,  $DC = c'$ , die Umkugel ( $O$ ) mit dem Halbmesser  $R$ . Das antikomplementäre Vierflach, d. h. das Vierflach aus den durch die Ecken des gegebenen Vierflachs parallel zu den Gegenflächen gelegten Ebenen, sei  $A_1B_1C_1D_1$  mit der Umkugel ( $O_1$ ) mit dem Halbmesser  $R_1$ . Die Örter der Punkte, deren Entfernungen von  $B$  und  $C$  in den konstanten Verhältnissen  $m:n$  oder  $n:m$  stehen, seien die Kugeln  $(S_a)$ ,  $(\Sigma_a)$ . Dann haben die Punkte  $A$  und  $D$  bezüglich  $(S_a)$  die Potenzen  $(P_a) = |(m^2b^2 - n^2c^2):(m^2 - n^2)|$  und  $(P_d) = |(m^2c'^2 - n^2b'^2):(m^2 - n^2)|$  unabhängig von der Länge  $a$ . Durch zyklische Vertauschung erhält man je 5 weitere Kugeln  $(S)$  und  $(\Sigma)$ . Sind insbesondere  $m^2 = a'^2 + b^2 + c'^2$ ,  $n^2 = a'^2 + b'^2 + c^2$  und entsprechend für die übrigen Kugeln, so hat  $O_1$  bezüglich der 6 Kugeln  $(S)$  die gleiche Potenz  $9R^2$ . Sind  $(P'_a)$ ,  $(P'_d)$  die Potenzen von  $A$  und  $D$  bezüglich der Kugel  $(\Sigma_a)$ , so ist  $(P_a) + (P'_a) + (P_d) + (P'_d) = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$ ,  $(P_a) - (P'_a) = (P_d) - (P'_d)$ . *Max Zacharias* (Berlin).



**Egerváry, E.: On orthocentric simplexes.** Acta Litt. Sci. Szeged 9, 218—226 (1940).

Zeichnet man in einem Dreieck  $ABC$  den Höhenschnittpunkt  $H$ , so ist umgekehrt jede der Ecken  $A, B, C$  Höhenschnittpunkt im Dreieck  $HBC, HCA, HAB$ . Im Raum  $R_n$  kommt die Eigenschaft nur einem „orthozentrischen Simplex“ zu. Verf. ermittelt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür: die Kanten  $P_i P_j$  müssen die Bedingungen  $\overline{P_i P_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ ,  $i \neq j$ , erfüllen, wo die Parameter nur durch die Bedingungen

$$\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n+1}} = 0, \quad \lambda_i + \lambda_j > 0 \text{ für } i \neq j$$

beschränkt sind. Ein einziges der  $\lambda_i$  ist negativ. Die kartesischen Koordinaten von  $n+1$  der Ecken — die letzte und einzige innere Ecke liege im Ursprung —, sind die Elemente einer orthogonalen Matrix und umgekehrt. Weiter ergibt sich noch eine Verallgemeinerung des Satzes vom Feuerbachschen Kreis, die nicht so einfach formuliert werden kann und samt den Beweisen in der Abh. selbst nachgesehen werden muß.

Fladt (Tübingen).

**Vivanti, G.: Un teorema di geometria piana.** Bol. mat. 12, 257—259 (1939).

Im Boll. mat. (3) 1, 29 (1939) wird an folgenden, 1824 von einem anonymen Verf. bewiesenen Satz erinnert: Der Ort der Punkte  $P$  in der Ebene eines regelmäßigen  $n$ -Ecks, für die das zugehörige Fußpunktviereck konstanten Inhalt hat, ist ein Kreis um den Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks. Für  $n=4$  ist der Inhalt des Fußpunktvierecks für alle Punkte der Ebene konstant. Verf. zeigt, daß dieser Satz bestehen bleibt, wenn man die Lote durch gerade Linien ersetzt, die gegen die Seiten des regelmäßigen Vielecks unter einem Winkel  $\lambda \neq 0$  geneigt sind, und daß der Inhalt zu  $\sin 2\lambda$  umgekehrt proportional ist. Die beiden Sätze sind übrigens als Sonderfälle in einem (vom Verf. nicht zitierten) allgemeinen Satz von J. Steiner enthalten [J. reine angew. Math. 2, 263—267 (1826); Werke 1, 139—143 (1881)]: „Zieht man aus einem in der Ebene eines gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punkte  $P$  nach den Seiten des Vielecks Gerade, die respektive mit gegebenen Geraden parallel sind, so ist, wenn der Flächeninhalt desjenigen Vielecks, dessen Scheitel in den Fußpunkten jener Geraden liegen, konstant bleiben soll, der Ort des Punktes  $P$  die Peripherie eines bestimmten Kegelschnitts. Die Form dieses Kegelschnitts und die Lage seines Mittelpunkts bleiben unverändert, wenn auch der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks größer oder kleiner angenommen wird, d. h. durch Veränderung dieses Inhalts entstehen ähnliche, ähnlich liegende und konzentrische Kegelschnitte.“

Zacharias (Berlin).

**Montel, Paul: Über die Quadratur des Kreises.** An. Soc. Ci. Argent. 128, 321—330 (1939) [Spanisch].

**Merz, K.: Würfelzerlegungen.** Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 84, 236—244 (1939).

Durch Schnittebenen und Auswahl von Scheitelzellen an Doppelstrecken läßt sich der Würfel in ein- und zweiseitige Teilvielfläche zerlegen. Dabei können die Doppelstrecken in einem Bündel liegen oder auf Kanten eines inneren Polyeders. Als Beispiele werden angeführt: 1. ein 10-(einseitig) und ein 28-Flach (zweiseitig); 2. Würfel mit Innentetraeder ergeben wieder ein 10- und 28-Flach; 3. Würfel mit Innenoktaeder ergeben ein einseitiges 32-Flach und ein zweiseitiges 62-Flach, und 4. gewisse Vereinfachungen. — Von den Polyedern werden die Netze und die Zusammenhangszahlen angegeben.

W. Nowacki (Bern).

**Coxeter, H. S. M.: Regular and semi-regular polytopes. I.** Math. Z. 46, 380—407 (1940).

Die Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der regulären und halbrekulären Polytope; der vorliegende erste Teil befaßt sich mit den ebenen und den räumlichen Gebilden (vgl. dies. Zbl. 10, 275; 13, 296; 14, 151; 20, 207f). In § 1 werden die gleichförmigen Polyeder behandelt: die fünf regulären Körper, die 13 Archimedischen Körper, das Prisma und das Antiprisma. § 2 handelt von den durch Spiegelung an Ebenen erzeugten Gruppen, § 3 von deren graphischen Darstellung. In § 4 werden diese Gruppen abstrakt definiert. § 5 gibt Wythoffs Konstruktion der gleichförmigen Polyeder, ausgehend von den Keplerschen Ebenenüberdeckungen mit regulären Vielecken, die auch bekannt sind als Aufteilung der Ebene in Wirkungs-



bereiche [vgl. F. Laves, Z. Kristallogr. 78 (1931); dies. Zbl. 2, 111]. In § 6 wird die Gruppe des Oktaeders mit eingeschriebenem Ikosaeder behandelt. § 7 gibt die Einteilung der dem Polyeder umschriebenen Kugel in sphärische Dreiecke. In § 8 wird ein Satz von Pappus über die Verteilung der Ecken in zueinander reziproken regulären Körpern verallgemeinert und bewiesen. Die Ausfüllung des Raumes mit gleichförmigen Polyedern wird in § 9 eingehend auseinandergesetzt, und in einem Anhang wird auf die Zusammenhänge mit den Cayleyschen Farbengruppen eingegangen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

**Dehn, Max: Über Ornamentik.** Norsk mat. Tidsskr. 21, 121—153 (1939).

**Gambier, Bertrand: Cercles perpendiculaires et un paradoxe relatif aux imaginaires.** Bull. Sci. math., II. s. 63, 233—238 (1939).

Im  $R_3$  heißen zwei Kreise zueinander senkrecht, wenn sie sich in zwei Punkten schneiden und wenn die Tangenten in einem derselben aufeinander senkrecht stehen. Die Fragestellung der Note ist dann die folgende: Bestimmung der Kreise, die zu zwei nicht verschlungenen und nicht auf ein und derselben Kugel liegenden Kreisen des  $R_3$  senkrecht sind. Es wird gezeigt, daß das Problem zwei Lösungen hat; die eine Lösung ist ein reeller Kreis, während der andere imaginär ist, aber reelle Gleichungen besitzt. Beide Kreise sind konjugiert. Das Problem wird zunächst rechnerisch behandelt, dann auf ein ebenes Problem zurückgeführt und dieses rein geometrisch (synthetisch) gelöst. Als ebenes Problem lautet es so: Man hat zwei Punktpaare  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ; man sucht ein neues Punktpaar  $(c, c')$  derart, daß  $(a, a', c, c')$  auf ein und demselben Kreis liegen, daß die Chordalen  $a, a'$  und  $c, c'$  in bezug auf diesen Kreis konjugiert sind, daß ferner  $(b, b', c, c')$  auf einem zweiten Kreis liegen und ebenfalls ein harmonisches Verhältnis bilden. Steck.

● **Graf, Ulrich: Darstellende Geometrie. 2., verb. u. verm. Aufl.** Leipzig: Quelle & Meyer 1940. 204 S. u. 335 Abb. geb. RM. 4.—

Die zweite Auflage betont in stärkerem Maße als die erste (dies. Zbl. 16, 129) das konstruktive Element der darstellenden Geometrie, die Verf. mit Recht und ganz im Sinne Emil Müllers die „Grammatik des Technikers“ nennt. Neue Anwendungsbeispiele aus Bau- und Maschinenwesen, Architektur und Photogrammetrie wurden aufgenommen, einige Abschnitte auch in theoretischer Hinsicht erweitert (Zentralriß des Kreises u. a.). Sehr klar und einprägsam die Zusammenfassung der behandelten Abbildungsarten nach den sie begründenden geometrischen Verwandtschaften und deren Invarianten.

H. Horninger (Berlin).

**Deschewoj, G. M.: Anwendung der Methode der Koordinatendarstellung auf die Auflösung von Aufgaben in der Perspektive.** Ann. Inst. Mines Léningrad 12, H. 3, 45—67 u. deutsch. Zusammenfassung 67 (1939) [Russisch].

Verf. gibt eine Einführung in die (bekannten) Methoden der perspektivischen Achsonometrie und beschränkt sich dabei auf den Fall, daß die vertikal gedachte Bildebene mit einer Koordinatenebene zusammenfällt. Behandelt werden zunächst die Darstellung von Punkten, Geraden, Ebenen und die einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde untereinander; die Umlegung einer Ebene in die Bildebene und die Lösung der metrischen Grundaufgaben. Die abgeleiteten Methoden werden angewendet bei der Abbildung von Kreisen, Vielflächen, Drehflächen, dem Schnitt von Drehflächen mit Ebenen und mit Geraden und dem Schnitt von krummen Flächen untereinander.

W. Schmid (Brünn).

**Johansson, Ingebrigt: Etwas über Axonometrie.** Norsk mat. Tidsskr. 22, 1—4 (1940) [Norwegisch].

Verf. zeigt, wie einige axonometrische Konstruktionen mit Benutzung einer zur z-Achse parallelen Hilfsebene, andere mittels Drehung einer Koordinatenebene um ihre Spur ausgeführt werden können.

Max Zacharias (Berlin).